

# LES VARIÉTÉS DE HECKE-HILBERT AUX POINTS CLASSIQUES DE POIDS 1

BETINA ADEL

RÉSUMÉ. On montre que la variété de Hecke associée aux formes de Hilbert sur un corps totalement réel  $F$  est lisse aux points correspondant à certaines séries thêta de poids 1 et on donne aussi un critère pour que le morphisme poids soit étale en ces points. Lorsque les séries thêta sont à multiplication réelle, on construit des formes surconvergentes propres généralisées qui ne sont pas classiques et on exprime leurs coefficients de Fourier à l'aide de logarithmes  $p$ -adiques de nombres algébriques. Notre approche utilise la théorie des déformations et pseudo-déformations galoisiennes.

## 1. INTRODUCTION

Les formes modulaires de Hilbert de poids 1 correspondent dans le programme de Langlands à des représentations impaires de dimension deux des groupes de Galois des corps totalement réels. Deligne-Serre [16], Rogawski-Tunnell [35] et Ohta [32] ont associé à une forme modulaire de poids 1 une représentation Galoisienne qui a la même fonction  $L$  et leur méthode est basée sur des congruences avec des formes modulaires de poids strictement plus grand que 1.

Le but de ce travail est de compter le nombre de familles de Hida qui se spécialisent en une forme classique de Hilbert de poids 1. Géométriquement, c'est équivalent à la description de la structure locale des variété de Hecke-Hilbert au point correspondant à cette forme de poids 1. On donne, sous certaines hypothèses, une réponse à cette question en utilisant la théorie des déformations galoisiennes de Mazur et quelques outils cohomologiques de la théorie du corps des classes.

On fixe un nombre premier  $p$ , un corps de nombres totalement réel  $F$  de degré  $n$  sur  $\mathbb{Q}$ ,  $E$  un corps  $p$ -adique qui décompose  $F$ ,  $\mathfrak{n}$  un idéal de l'anneau des entiers  $\mathfrak{o}$  de  $F$  tel que  $N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}) \geq 4$  et  $I_F$  un ensemble de  $n$  plongements complexes de  $\bar{\mathbb{Q}}$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}$  qui prolongent les plongements distincts de  $F$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}$ . Soit  $\mathcal{E}$  la variété de Hecke-Hilbert de niveau modéré  $\mathfrak{n}$  associée à  $F$  introduite par F.Andreatta, A.Iovita

et V. Pilloni dans [2]. Il existe un morphisme localement fini  $\kappa : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}_F$  appelé le morphisme poids, où  $\mathcal{W}_F$  est la variété rigide sur  $E$  qui représente les morphismes  $\mathbb{Z}_p^\times \times \text{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{G}_m$ .

Soit  $f$  une forme modulaire de Hilbert cuspidale sur  $F$ , de poids 1, propre, de niveau modéré  $\mathbf{n}$  et de pente finie dans le cas où  $p$  divise le niveau de  $f$ . Soit  $\rho : G_F \rightarrow \text{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$  la représentation galoisienne associée à  $f$  par Rogawski-Tunnell [35]. Puisque l'image de  $\rho$  est finie, pour tout premier  $\mathfrak{p}_i$  de  $F$  au dessus de  $p$ , la restriction de  $\rho$  au groupe de décomposition  $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$  est la somme de deux caractères  $\psi'_i \oplus \psi''_i$  dont l'un est non-ramifié. On dit que  $f$  est régulière en  $p$  si pour tout premier  $\mathfrak{p}_i$  de  $F$  au dessus de  $p$ , la condition  $\psi'_i \neq \psi''_i$  est vérifiée.

Pour déformer  $p$ -adiquement  $f$ , on doit choisir une  $p$ -stabilisation de  $f$  de pente finie (voir [39, §1.2]). Une  $p$ -stabilisation de  $f$  est ordinaire en  $p$  et elle définit un point du lieu quasi-ordinaire de la variété de Hecke  $\mathcal{E}$  et même  $f$  définit un point de la courbe de Hecke-Hilbert cuspidale de poids parallèle  $\mathcal{C}_F \hookrightarrow \mathcal{E}$ .

Soit  $f$  une  $p$ -stabilisation d'une série thêta  $\theta(\psi)$  de poids 1 et de niveau modéré  $\mathbf{n}$ , où  $\psi : G_M \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$  est un caractère d'ordre fini et  $M$  une extension quadratique de  $F$ . La forme modulaire  $f$  définit un point  $x \in \mathcal{E}$  (même  $x \in \mathcal{C}_F$ ) et on note respectivement  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}^{ord}$  les complétés des anneaux locaux de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{C}_F$  en  $x$  et  $\Lambda$  le complété de l'anneau local de  $\mathcal{W}_F$  en  $\kappa(x)$ .

Soient  $\mathfrak{m}_\Lambda$  l'idéal maximal de  $\Lambda$  et  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}/\mathfrak{m}_\Lambda \mathcal{T}$  l'anneau local de la fibre de  $\kappa(x)$  en  $x$ . Notons que  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}/\mathfrak{m}_\Lambda \mathcal{T}$  est un anneau artinien, puisque  $\kappa$  est localement fini.

Soit  $S_p$  (resp.  $S^p$ ) l'ensemble des premiers de  $F$  au-dessus de  $p$  qui se décomposent dans  $M$  (resp. qui sont inertes ou qui se ramifient dans  $M$ ). Pour tout premier  $\mathfrak{p}_i$  de  $F$  au dessus de  $p$  on note  $e_i$  l'indice de ramification de  $\mathfrak{p}_i$  et  $f_i$  le degré d'inertie de  $\mathfrak{p}_i$  (on a  $\sum_{\mathfrak{p}_i|p} e_i f_i = [F : \mathbb{Q}] = n$ ).

**Théorème 1.1.** *Supposons que  $f$  est  $p$ -régulière,  $M$  est totalement réel et que la conjecture de Leopoldt est vraie pour  $M$ , alors :*

- (i) *la variété  $\mathcal{E}$  est toujours lisse au point  $x$  et la dimension de l'espace tangent de la fibre  $\mathcal{T}'$  de  $\kappa(x)$  en  $x$  est égale à  $\sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} e_i \cdot f_i$ .*
- (ii) *la dimension de l'espace tangent de  $\mathcal{T}^{ord}$  est égale à  $\max\{1, \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i \cdot e_i\}$ .*

Lorsque  $F = \mathbb{Q}$ , le théorème ci-dessus a été démontré par Bellaïche et Dimitrov [7] et aussi par Cho-Vatsal [12] sous certaines hypothèses supplémentaires.

Soit  $S_1^\dagger(\mathfrak{n}, \chi)[[f]]$  l'espace propre généralisé de  $f$  dans l'espace des formes modulaires surconvergentes de poids 1. Sous les hypothèses du Théorème 1.1 et si  $S_p$  est non vide, il existe un morphisme surjectif  $\pi : \mathcal{T}' \twoheadrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$  de noyau  $I_\pi$ . Ainsi,  $I_\pi$  annule un sous-espace  $S_1^\dagger(\mathfrak{n}, \chi)[I_\pi]$  de  $S_1^\dagger(\mathfrak{n}, \chi)[[f]]$  de dimension 2, et ce sous-espace contient une forme non-classique.

L'évaluation  $f_{\mathfrak{c}}$  de toute forme modulaire surconvergente  $f$  en les objets de Tate  $(\mathbb{G}_m \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{d}_F^{-1})/q$  associés aux pointes standards  $\infty(\mathfrak{c}; \mathfrak{o})$ , où  $\mathfrak{c}$  parcourt les éléments de  $\text{CL}_F^+$  détermine son  $q$ -développement (voir [20, §2.3]). Après une modification des coefficients de son  $q$ -développement, on obtient son développement adélique et ses coefficients de Fourier notés  $a_{\mathfrak{q}}(f)$  où  $\mathfrak{q}$  est un idéal de  $\mathfrak{o}$ .

Suivant les définitions de [14], une forme surconvergente  $f^\dagger$  dans  $S_1^\dagger(\mathfrak{n}, \chi)[I_\pi]$  qui n'est pas un multiple de  $f$  est appelée une forme généralisée attachée à  $f$ , et on dit qu'elle est normalisée si son premier coefficient de Fourier  $a_{\mathfrak{o}}(f^\dagger)$  de la  $q$ -expansion de  $f^\dagger$  est nul.

Pour n'importe quel idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $F$ , on notera respectivement  $a_{\mathfrak{q}}(f^\dagger)$  et  $a_{\mathfrak{q}}(f)$  les coefficients de Fourier de  $f^\dagger$  et de  $f$ . Fixons un plongement  $\iota_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$  et notons  $\log_p$  la détermination standard du logarithme  $p$ -adique sur  $\bar{\mathbb{Q}}_p^\times$ . Soient  $\sigma \in G_F$  un automorphisme non trivial sur  $M$ ,  $H$  le corps de nombres fixé par  $\ker \psi/\psi^\sigma$ ,  $\ell \nmid np$  un premier de  $F$  inerte dans  $M$  et  $\lambda$  un premier de  $H$  au dessus de  $\ell$ . Choisissons  $u_\lambda$  dans  $\mathcal{O}_H[1/\lambda]^\times \otimes \mathbb{Q}$  une  $\lambda$ -unité de  $H$  de  $\lambda$ -valuation égale à 1.

Soient  $\sigma_\lambda \in \text{Gal}(H_\lambda/F_\ell) \subset \text{Gal}(H/F)$  le Frobenius en  $\ell$  attaché à la place finie  $\lambda$  et  $I'_F$  le sous-ensemble de  $I_F$  constitué par les plongements de  $\bar{\mathbb{Q}}$  qui induisent les places de  $H$  au dessus de  $p$  apparaissant dans  $S_p$  suivant le diagramme (8) de §4.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème [14, 1.1].

**Théorème 1.2.** *On suppose que :*

- (i)  *$M$  est un corps totalement réel et la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour  $M$ .*
- (ii) *l'ensemble  $S_p$  n'est pas vide et  $p$  est relativement premier au niveau de  $\theta(\psi)$ .*
- (iii)  *$\theta(\psi)$  est  $p$ -régulière.*

*Soit  $f$  une  $p$ -stabilisation de  $\theta(\psi)$  telle que  $\psi^\sigma(\text{Frob}_{\mathfrak{p}_i})$  est la valeur propre de l'opérateur  $U_{\mathfrak{p}_i}$  quand  $\mathfrak{p}_i \in S_p$ . Alors, on peut associer linéairement à tout  $(\alpha_i)_{i \in I'_F} \in$*

$\bar{\mathbb{Q}}_p^{|I'_F|}$  un morphisme surjectif  $\pi : \mathcal{T}' \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$  tel que pour tout  $\ell \nmid np$ ,

$$a_\ell(f^\dagger) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \text{ se décompose dans } M; \\ \psi(\sigma\sigma_\lambda) \sum_{g'_i \in I'_F} \alpha_i \sum_{h \in \text{Gal}(H/M)} \psi/\psi^\sigma(h) \cdot \log_p(g_i \circ h(u_\lambda)) & \text{si } \ell \text{ est inerte dans } M. \end{cases}$$

Les théorèmes suivants décrivent la structure locale de  $\mathcal{E}$  au point  $x$  lorsque  $M$  n'est pas totalement réel.

**Théorème 1.3.** *Soient  $K$  un corps quadratique imaginaire dans lequel  $p$  est décomposé,  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  non trivial sur  $K$  et  $\xi : G_K \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$  un caractère d'ordre fini tel que  $\xi/\xi^\sigma$  est d'ordre paire. Notons  $M$  l'extension biquadratique de  $\mathbb{Q}$  contenue dans le corps de nombres fixé par  $\ker(\xi/\xi^\sigma)$  et  $F$  le sous-corps quadratique réel de  $M$ . Supposons que  $\psi = \xi|_{G_M}$ ,  $\psi|_{G_{M_{v_i}}} \neq \psi|_{G_{M_{v_i}}}^\sigma$  pour toute place première  $v_i$  de  $M$  au dessus de  $p$  et que  $(\psi/\psi^\sigma)^2$  est non trivial.*

*Alors le morphisme  $\kappa : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}_F$  est étale au point associé à une  $p$ -stabilisation  $f$  de  $\theta(\xi|_{G_M})$ .*

**Théorème 1.4.** *Soient  $p \geq 3$ ,  $\mathbb{F}$  un corps fini de caractéristique  $p$  et  $\psi$  le relèvement de Teichmüller d'un caractère  $\bar{\psi} : G_M \rightarrow \mathbb{F}^\times$  tel que  $\bar{\psi}/\bar{\psi}^\sigma$  n'est pas quadratique. Supposons que :*

- (i) *Tout premier  $\mathfrak{q}$  de  $F$  qui divise le conducteur de  $\bar{\psi}$  se décompose dans  $M$ ,  $\bar{\psi}$  est ramifié sur un facteur de  $\mathfrak{q}$  et non ramifié sur l'autre et  $p$  est non ramifié dans  $M$ .*
- (ii) *La restriction de  $\bar{\rho} = \text{Ind}_M^F \bar{\psi}$  à  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p}))$  est absolument irréductible et  $\bar{\rho}$  est  $p$ -distinguée.*
- (iii)  *$M$  a  $2r$  plongements complexes et  $[F : \mathbb{Q}] - r - |S^p| - \sum_{\mathfrak{p}_i \in S^p} f_i \cdot e_i > 0$*

*Alors la variété rigide  $\mathcal{E}$  est ramifiée sur l'espace des poids  $\mathcal{W}_F$  au point  $x$ .*

**Remarque :** Nous avons appris récemment que S.V.Deo a annoncé un résultat similaire au théorème 1.1 dans [17] en utilisant une méthode différente pour calculer les dimensions des espaces tangents de nos problèmes de déformation. Il a annoncé un résultat similaire au théorème 1.4 sous l'hypothèse que la conjecture de *Schanuel* est vraie pour le corps fixé par  $\ker \text{ad } \rho$ .

Notre étude de la structure locale de la variété rigide  $\mathcal{E}$  au voisinage d'une forme classique de poids 1 donne l'application suivante sur la théorie des fonctions  $L$   $p$ -adiques. Mazur, Kitagawa, Panchishkin, Teitelbaum et Dimitrov ont construit une

fonction  $L$   $p$ -adique pour une famille de Hida sous certaines hypothèses (voir les conditions (A) ou (B) dans [27, p.105]). Leur propriété principale est la suivante : chaque spécialisation en une forme classique non critique  $g$  est égale, à une unité près, à la fonction  $L$   $p$ -adique  $L_p(g, s)$  attachée à  $g$  (voir [1], [31], [33] et [21]). Soit  $\mathcal{W}_F^*$  l'espace analytique rigide définie sur  $\mathbb{Q}_p$  dont les  $A$ -points sont en bijection avec  $\text{Hom}(G_{F_{p,\infty}}, A^\times)$ , où  $G_{F_{p,\infty}}$  est l'extension maximale non ramifiée en dehors de  $p$  et des places à l'infini. Ainsi,  $\mathcal{W}_F^* = \coprod_{\epsilon \in \pi_0((F \otimes \mathbb{R})^\times)} \mathcal{W}_F^\epsilon$  où  $\mathcal{W}_F^\epsilon$  est l'espace analytique rigide définie sur  $\mathbb{Q}_p$  dont les  $A$ -points sont en bijection avec  $\text{Hom}(G_{F_p}, A^\times)$ .

Les méthodes utilisées dans [4] (détaillées dans [5, Corollary VI.4.2]) et dans [23] donnent le corollaire suivant :

**Corollaire 1.5.** *Soit  $f$  une forme classique de poids 1 régulière en  $p$  qui satisfait soit les hypothèses du théorème 1.3 ou soit  $S_p$  est vide et  $M$  est un corps totalement réel qui vérifie la conjecture de Leopoldt. Alors, il existe un voisinage admissible  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\mathcal{E}$ , deux constantes réelles  $0 < c < C$ , et une fonction analytique  $L_p^\epsilon$  sur  $\mathcal{U} \times \mathcal{W}_F^\epsilon$ , telle que pour toute forme propre non critique  $g \in \mathcal{U}$ , et pour tout  $s \in \mathcal{W}_F^\epsilon$  on a*

$$L_p^\epsilon(g, s) = e^\epsilon(g) L_p(g, s),$$

où  $e^\epsilon(g)$  est une période  $p$ -adique qui vérifie  $c < |e^\epsilon(g)|_p < C$ . Pour tout  $g \in \mathcal{U}$  les fonctions  $s \mapsto L_p^\epsilon(g, s)$  sont bornées.

La fonction  $L_p^\epsilon(f_\alpha, \cdot)$  est uniquement déterminée à une constante inversible près, et nous donne aussi une définition naturelle d'une fonction  $L$   $p$ -adique associée à  $f$ .

On va expliquer maintenant les principales idées derrière la preuve des théorèmes §1.1 et §1.3. Dans le §3.1, nous introduisons deux problèmes de déformation de  $\rho$  représentables par les anneaux locaux  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}^{ord}$  tels que  $\mathcal{R}$  s'envoie surjectivement sur  $\mathcal{T}$  par la proposition 6.3. Le calcul de l'espace tangent de  $\mathcal{R}$  représente une partie importante de la preuve. Nous montrons dans les théorèmes 5.3 et 5.5 que la dimension de l'espace tangent de  $\mathcal{R}$  est toujours  $[F : \mathbb{Q}] + 1$  et donc la surjection ci-dessus est un isomorphisme d'anneaux locaux réguliers et on a  $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}^{ord}$ . L'étude de l'algèbre  $\mathcal{T}'$  donne un critère précis pour que  $\kappa$  soit étale en  $x$ . L'espace tangent de  $\mathcal{R}$  est isomorphe à un sous-espace de  $H^1(F, \text{ad } \rho)$  qui satisfait certaines conditions locales pour les premiers de  $F$  au dessus de  $p$ , mais vu que  $\rho$  est d'image finie, par inflation-restriction, l'espace tangent peut être vu comme un sous-espace de  $(\text{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes \text{ad } \rho)^{\text{Gal}(H/F)}$ , où  $H$  est une extension galoisienne finie de  $F$ .

Pour calculer la dimension de cet espace tangent, il suffit de déterminer la dimension du  $\psi/\psi^\sigma$ -espace propre à l'intérieur de  $\text{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ . En effet, sa dimension peut être facilement bornée par la théorie du corps de classe, et quand  $M$  est un corps totalement réel, on constate le phénomène suivant : le corps  $H$  est CM et le  $\psi/\psi^\sigma$ -espace propre à l'intérieur des unités globales est trivial (voir 5.1). Ainsi, nous pouvons construire une base de l'espace tangent de  $\mathcal{T}'$  en termes de logarithme  $p$ -adique. D'autre part, lorsque  $M$  n'est ni totalement réel, ni totalement complexe, on montre que  $\mathcal{R}_{\min} \simeq \mathcal{T}$  en utilisant un résultat de Fujiwara [22].

## 2. VARIÉTÉS DE HECKE-HILBERT

Les formes modulaires  $p$ -adiques de Hilbert sur  $F$  peuvent être vues comme des fonctions sur les  $\mathbb{Z}_p^\times \times \text{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p)$ -torseurs de la trivialisation de la tour d'Igusa qui est le pro-revêtement étale du lieu ordinaire de l'analytifié du schéma modulaire de Hilbert donné par la limite projective des duals des sous-groupes canoniques. Les fonctions homogènes de poids  $(w, v)$  pour l'action de  $\mathbb{Z}_p^\times \times \text{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p)$  sont les formes modulaires  $p$ -adiques de Hilbert de poids  $(w, v)$ . Donc, on obtient un espace de dimension infinie qui se fibre sur l'espace des poids, et grâce à l'existence du sous-groupe canonique sur le lieu ordinaire, on peut plonger l'espace des formes modulaires de Hilbert dans l'espace des formes modulaires  $p$ -adiques de Hilbert. Pour étudier les familles  $p$ -adiques de pente finie, V.Pilloni, F.Andreatta et A.Iovita ont prolongé la construction précédente à un voisinage surconvergent strict du lieu ordinaire dans le but d'appliquer la théorie spectrale de Coleman-Mazur à l'opérateur complètement continue  $U_p$  et en utilisant la machinerie des variétés rigides de Hecke due à Buzzard [10], ils ont obtenu la variété rigide de Hecke-Hilbert désirée  $\mathcal{E}$  sur  $E$ . D'autre part, Kisin et Lai ont construits dans [30] la courbe de Hecke-Hilbert cuspidale  $\mathcal{C}_F$  de poids parallèle de niveau modéré  $\mathfrak{n}$  en étendant la construction de Coleman-Mazur de la courbe de Hecke [13]. On peut identifier  $\mathcal{C}_F$  avec le sous-espace fermé de  $\mathcal{E}$  donné par l'équation  $v = 0$ . Selon les résultats de [30], il existe un morphisme localement fini surjectif et plat  $\kappa : \mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{W}_{F,v=0}$ , où  $\mathcal{W}_{F,v=0}$  est la sous-variété fermée de  $\mathcal{W}_F$  définie par l'équation  $v = 0$  ( $\kappa$  est la restriction de  $w$  à  $\mathcal{C}_F$ ). Notons que  $\mathcal{T}'$  est aussi l'anneau local en  $x$  de la fibre  $\kappa^{-1}(\kappa(x))$ . Le lieu  $\mathcal{E}^{n.\text{ord}}$  de  $\mathcal{E}$  où  $|U_p|_p = 1$  est ouvert et fermé dans  $\mathcal{E}$  et est appelé le lieu quasi-ordinaire. Il est connu que le lieu quasi-ordinaire  $\mathcal{E}^{n.\text{ord}}$  est isomorphe à la fibre générique de l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire en  $p$ .

D'après [10] et [2], la variété de Hecke  $\mathcal{E}$  est équidimensionnelle de dimension  $[F : \mathbb{Q}] + 1$ , réduite et équipée d'un morphisme localement fini surjectif  $\kappa : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}_F$  appelé le morphisme poids, où  $\mathcal{W}_F$  est l'espace rigide sur  $E$  représentant les morphismes  $\mathbb{Z}_p^\times \times \text{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{G}_m$ . Par construction de  $\mathcal{E}$ , il existe un morphisme  $\mathbb{Z}[(T_\ell)_{\ell \nmid pn}, U_p] \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{rig}(\mathcal{E})$  tel que les images de  $(T_\ell)_{\ell \nmid pn}$  et  $U_p$  sont des sections globales de  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{rig}$  bornées par 1 ; l'application canonique " système de valeurs propres "  $\mathcal{E}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}[(T_\ell)_{\ell \nmid pn}, U_p], \mathbb{C}_p)$  est injective et induit une correspondance bijective entre l'ensemble de  $\mathbb{C}_p$ -points de  $\mathcal{E}$  de poids  $(w, v)$  et l'ensemble des formes modulaires cuspidales surconvergentes de Hilbert propres de niveau modéré  $\mathfrak{n}$ , de poids  $(w, v)$ , avec des coefficients de Fourier dans  $\mathbb{C}_p$  et de pente finie. Puisque l'image de  $\mathbb{Z}[(T_\ell)_{\ell \nmid pn}, U_p]$  dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{rig}(\mathcal{E})$  est relativement compacte et que la  $E$ -algèbre  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{rig}(\mathcal{E})$  est réduite, il existe un pseudo-caractère continue :

$$(1) \quad \text{Ps}_{\mathcal{E}} : G_{F, np} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{E})$$

qui envoie  $\text{Frob}_\ell$  vers  $T_\ell$  pour tout  $\ell \nmid np$  (voir [2, §5] and [3] pour plus de détails).

D'après le théorème [8, 1.1], le morphisme poids  $\kappa : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}_F$  est étale en les points *non critiques* et *p-réguliers*.

En général, on n'a pas beaucoup de résultats sur la géométrie des variétés de Hecke-Hilbert. Par exemple, on ne sait pas si elles ont un nombre fini de composantes ou si elles sont propres sur l'espace des poids (voir [36]). Lorsque  $F = \mathbb{Q}$ , Diao et Liu ont montré dans [18] que la courbe de Coleman-Mazur est propre sur l'espace des poids. On sait aussi que la courbe de Coleman-Mazur est lisse en la plupart des points classiques (voir [6], [7], [12], [13] et [28]) bien qu'il existe des points associés à des formes propres classiques et irrégulières en  $p$  pour lesquels la courbe de Hecke n'est pas lisse [19].

**Séries thêta de poids 1.** On note respectivement  $\mathfrak{o}$  et  $\mathcal{O}$  les anneaux des entiers de  $F$  et de  $E$ . Soient  $M$  une extension quadratique de  $F$ ,  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$  non trivial sur  $M$  et  $\mathbb{F}$  le corps résiduel de  $\mathcal{O}$ .

On fixe deux plongements  $E \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ ,  $\iota_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$  et une clôture algébrique  $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$  de  $\mathbb{Q}$ . On note  $c$  la conjugaison complexe du groupe de Galois absolu  $G_{\mathbb{Q}}$  et  $\varepsilon_M$  le caractère non trivial de l'extension quadratique  $M/F$  et  $\Delta$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(M/F)$ .

Soient  $\psi : G_M \rightarrow \mathcal{O}^\times$  un caractère d'ordre fini,  $\psi^\sigma$  le caractère  $G_M$  définie par  $\psi^\sigma(g) = \psi(\sigma^{-1}g\sigma)$ ,  $\psi_\circ$  le caractère  $\psi/\psi^\sigma$  et  $\mathfrak{b}$  le conducteur de  $\psi$ . Ainsi, on peut voir  $\psi$  comme un caractère sur le groupe des idèles  $\psi : M^\times \backslash M_\mathbb{A}^\times \rightarrow \mathcal{O}^\times$  (où  $M_\mathbb{A}^\times$  est le groupe des idèles de  $M$ ).

On suppose que pour toute place  $\tau$  de  $F$  qui reste réelle sur  $M$ ,  $\psi$  est trivial sur l'une des places de  $M$  au dessus de  $\tau$  et non trivial sur l'autre. Soit  $\mathfrak{n}$  la partie de  $N_{M/F}(\mathfrak{b}) \cdot \Delta_{M/F}$  qui est première à  $p$ . D'après un théorème de Weil, il existe une série de thêta  $\theta(\psi)$  de niveau modéré  $\mathfrak{n}$  telle que  $L(s, \theta(\psi)) = L(s, \psi)$  (i.e  $\rho = \text{Ind}_M^F \psi$  est la représentation  $p$ -adique associée à  $\theta(\psi)$ ). Les systèmes de valeurs propres d'une  $p$ -stabilisation  $f$  de  $\theta(\psi)$  correspondent à un point  $x \in \mathcal{E}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ , de plus  $x$  se trouve sur lieu quasi-ordinaire  $\mathcal{E}^{n.\text{ord}}$  de  $\mathcal{E}$ .

### 3. DÉFORMATIONS GALOISIENNES

On introduit dans cette section trois problèmes de déformations de  $\rho$  qu'on notera  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}^{\text{ord}}$  et  $\mathcal{D}_{\det \rho}^{\text{ord}}$  et on déterminera leurs espaces tangents respectifs dans la section 5.

#### 3.1. Problèmes de déformations.

L'image projective de  $\rho$  est diédrale et contient un élément d'ordre 2 qu'on notera  $\sigma$ . Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $\bar{\mathbb{Q}}_p^2$  dans laquelle  $\rho|_{G_M} = \psi \oplus \psi^\sigma$ . Après une renormalisation de  $(e_1, e_2)$ , on peut supposer que  $\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans  $\text{PGL}_2(\bar{\mathbb{Q}})$ .

Le choix du groupe de décomposition en chaque place  $\mathfrak{p}_i$  de  $F$  au dessus de  $p$  induit une place première canonique  $v_i$  de  $M$  parmi les places premières de  $M$  au dessus de  $\mathfrak{p}_i$  et nous permet de voir  $G_{M_{v_i}} \subset G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$  comme un sous-groupe de décomposition de  $G_M$  en  $v_i$ . Puisque  $f$  est  $p$ -régulière et  $\rho$  d'image finie,  $\rho$  est *ordinaire* en chaque premier  $\mathfrak{p}_i$  de  $F$  au dessus  $p$  dans le sens où la restriction de  $\rho$  à  $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$  est l'extension d'un caractère non ramifié  $\psi_i''$  par un caractère  $\psi_i'$  tel que  $\psi_i''(\text{Frob}_{\mathfrak{p}_i}) = \alpha_i$ , où  $\alpha_i$  est la valeur propre de  $f$  pour  $U_{\mathfrak{p}_i}$ . Maintenant, on choisit une base  $\{e'_{i,1}, e'_{i,2}\}$  de  $\bar{\mathbb{Q}}_p^2$  dans laquelle  $\rho|_{G_{F_{\mathfrak{p}_i}}} = \psi_i' \oplus \psi_i''$ . Si les deux caractères  $\psi_i'$  et  $\psi_i''$  sont non ramifiés, on privilégiera  $\psi_i''$ , de sorte que la base  $\{e'_{i,1}, e'_{i,2}\}$  soit unique à un scalaire près. Dans le cas où  $\mathfrak{p}_i$  se décompose dans  $M$ , on a  $(e'_{i,1}, e'_{i,2}) = (e_1, e_2)$  où  $\psi^\sigma(\text{Frob}_{\mathfrak{p}_i}) = \alpha_{\mathfrak{p}_i}$ , sinon  $\psi(\text{Frob}_{\mathfrak{p}_i}) = \alpha_{\mathfrak{p}_i}$  et  $(e'_{i,2}, e'_{i,1}) = (e_1, e_2)$ .

Soit  $\mathfrak{C}$  la catégorie dont les objets sont les  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -algèbre noethériennes, locales, complètes par rapport à l'idéal maximal, de corps résiduel isomorphe à  $\bar{\mathbb{Q}}_p$  et dont



les morphismes sont les homomorphismes de  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -algèbres locales. Soient  $A$  un anneau dans la catégorie  $\mathfrak{C}$  et  $\rho_A : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(A)$  une déformation de  $\rho$ , on dit que  $\rho_A$  est quasi-ordinaire (resp. ordinaire) en  $p$  si, et seulement si, pour tout  $\mathfrak{p}_i \mid p$ , on a  $(\rho_A)|_{G_{F_{\mathfrak{p}_i}}} \simeq \begin{pmatrix} \psi'_{i,A} & * \\ 0 & \psi''_{i,A} \end{pmatrix}$ , où  $\psi''_{i,A}$  est un caractère (resp. un caractère non ramifié) qui relève  $\psi''_i$ . On considère le foncteur de déformation  $\mathcal{D}^{ord} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathrm{SETS}$  (resp.  $\mathcal{D}$ ), donné par les classes d'équivalences strictes des déformations de  $\rho$  qui sont ordinaires en  $p$  (resp. quasi-ordinaire en  $p$ ). Puisque la représentation  $\rho = \mathrm{Ind}_M^F \psi$  est absolument irréductible,  $p$ -ordinaire et  $p$ -régulière, les critères de Schlesinger impliquent que  $\mathcal{D}^{ord}$  (resp.  $\mathcal{D}$ ) est représentable par le 2-uplet  $(\mathcal{R}^{ord}, \rho_{\mathcal{R}^{ord}})$  (resp.  $(\mathcal{R}, \rho_{\mathcal{R}})$ ), où  $\rho_{\mathcal{R}^{ord}}$  (resp.  $\rho_{\mathcal{R}}$ ) est l'anneau de déformation universel  $p$ -ordinaire (resp. quasi-ordinaire en  $p$ ) de  $\rho$ . Soit  $\mathcal{D}_{\det \rho}^{ord}$  le sous-foncteur de  $\mathcal{D}^{ord}$  qui consiste en les déformations de déterminant fixé.

### 3.2. Espaces tangents.

On note  $t_{\mathcal{D}^{ord}}$  (resp.  $t_{\mathcal{D}}$ ) l'espace tangent de  $\mathcal{D}^{ord}$  (resp.  $\mathcal{D}$ ) et  $t_{\mathcal{D}^{ord}}^0$  l'espace tangent de  $\mathcal{D}_{\det \rho}^{ord}$ .

Il existe une décomposition

$$(\mathrm{ad} \rho)|_{G_{F_{\mathfrak{p}_i}}} = \psi'_i/\psi'_i \oplus \psi'_i/\psi''_i \oplus \psi''_i/\psi'_i \oplus \psi''_i/\psi''_i$$

Le choix de la base  $(e'_{i,1}, e'_{i,2})$  de  $M_{\bar{\mathbb{Q}}_p}$  identifie  $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_p}(M_{\bar{\mathbb{Q}}_p})$  avec  $M_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ ; puisque  $\rho$  est  $p$ -ordinaire pour tout premier  $\mathfrak{p}_i$  de  $F$ , on a une application naturelle  $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$ -équivariante :

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathrm{ad} \rho &\xrightarrow{C'_{i,*}, D'_{i,*}} \psi''_i/\psi'_i \oplus \psi''_i/\psi''_i \\ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} &\mapsto (c', d') \end{aligned}$$

Par un argument standard de la théorie de la déformation, on a le résultat suivant (voir [7, Lemme 2.3]).

#### Lemme 3.1.

- (i)  $t_{\mathcal{D}^{ord}} = \ker \left( H^1(F, \mathrm{ad} \rho) \xrightarrow{(C_i^*, D_i^*)} \prod_{\mathfrak{p}_i \mid p} (H^1(F_{\mathfrak{p}_i}, \psi''_i/\psi'_i) \oplus H^1(I_{\mathfrak{p}_i}, \psi''_i/\psi''_i)) \right)$
- (ii)  $t_{\mathcal{D}^{ord}}^0 = \ker \left( H^1(F, \mathrm{ad}^0 \rho) \xrightarrow{(C_i^*, D_i^*)} \prod_{\mathfrak{p}_i \mid p} (H^1(F_{\mathfrak{p}_i}, \psi''_i/\psi'_i) \oplus H^1(I_{\mathfrak{p}_i}, \psi''_i/\psi''_i)) \right)$
- (iii)  $t_{\mathcal{D}} = \ker \left( H^1(F, \mathrm{ad} \rho) \xrightarrow{C_i^*} \prod_{\mathfrak{p}_i \mid p} (H^1(F_{\mathfrak{p}_i}, \psi''_i/\psi'_i)) \right)$

### 3.3. La suite exacte inflation-restriction appliquée à $t_{\mathcal{D}}$ .

On note  $H \subset \bar{\mathbb{Q}}$  le corps de nombres totalement complexe fixé par  $\ker(\mathrm{ad} \rho)$ . Le groupe  $G' = \mathrm{Gal}(H/F)$  est naturellement isomorphe à l'image projective de  $\rho$  qui est un groupe diédral. Pour tout  $\mathfrak{p}_i$  de  $F$  au dessus de  $p$ , on note  $w_i$  la place canonique de  $H$  au dessus de  $\mathfrak{p}_i$  induite par  $\iota_p$ .

**Lemme 3.2.** [7, Lemme 2.4] *Soient  $L$  un corps de nombres et  $\rho$  une représentation d'image finie de  $G_L$  dans un  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -espace vectoriel de dimension finie.*

- (i) *Soit  $\Sigma$  un ensemble de places de  $L$  et supposons que pour tout  $v \in \Sigma$  il existe un quotient  $\rho_v$  de  $\rho|_{G_{L_v}}$ . Soit  $H$  une extension galoisienne finie de  $L$ , pour tout  $v \in \Sigma$ , on choisit une place  $w(v)$  de  $H$  au dessus de  $v$ . Alors*

$$\ker \left( H^1(L, \rho) \rightarrow \prod_{v \in \Sigma} H^1(L_v, \rho_v) \right) \simeq \ker \left( H^1(H, \rho)^{\mathrm{Gal}(H/L)} \rightarrow \prod_{v \in \Sigma} H^1(H_{w(v)}, \rho_v) \right).$$

- (ii) *Le morphisme naturel*

$$H^1(L, \rho) \rightarrow \prod_{v|p} H^1(L_v, \rho)$$

*est injectif.*

En utilisant la base  $\{e_1, e_2\}$  définie ci-dessus, on peut voir les éléments de  $H^1(F, \mathrm{ad} \rho)$  comme des 1-co-cycles

$$(3) \quad \begin{aligned} G_F &\rightarrow M_2(\bar{\mathbb{Q}}_p) \\ g &\mapsto \begin{pmatrix} a(g) & b(g) \\ c(g) & d(g) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque  $\rho$  est irréductible,  $\psi^\sigma \neq \psi$  et  $\ker(\psi^\sigma/\psi)$  définit une extension cyclique  $H$  de  $M$ . Ainsi, on a la décomposition suivante  $\bar{\mathbb{Q}}_p[G_F]$ -modules :

$$(4) \quad \mathrm{ad} \rho \simeq 1 \oplus \mathrm{ad}^0 \rho \simeq 1 \oplus \mathrm{ad}^0(\mathrm{Ind}_M^F \psi) \simeq 1 \oplus \epsilon_M \oplus \mathrm{Ind}_M^F(\psi_\heartsuit),$$

Par inflation-restriction, on a aussi

$$H^1(F, \mathrm{ad} \rho) = H^1(M, \mathrm{ad} \rho)^{\mathrm{Gal}(M/F)}.$$

D'autre part, on a la décomposition suivante

$$(5) \quad \begin{aligned} H^1(M, \mathrm{ad} \rho) &\simeq H^1(M, \psi/\psi) \oplus H^1(M, \psi_\heartsuit) \oplus H^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) \oplus H^1(M, \psi^\sigma/\psi^\sigma), \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto (a, b, c, d), \end{aligned}$$

où l'action du groupe  $\text{Gal}(M/F)$  échange  $a$  et  $d$  et aussi  $b$  et  $c$ .

En combinant le lemme 3.1 et le lemme 3.2, on obtient :

**Corollaire 3.3.** *Dans la base  $(e_1, e_2)$ , on a :*

$$(i) \quad t_{\mathcal{D}^{ord}} \simeq \ker \left( H^1(M, \text{ad } \rho)^{\text{Gal}(M/F)} \xrightarrow{(C_i^*, D_i^*)} \prod_{\mathfrak{p}_i | p} H^1(M_{v_i}, \psi_i''/\psi_i') \prod_{\mathfrak{p}_i | p} H^1(I_{v_i}, \psi_i''/\psi_i') \right)$$

$$(ii) \quad Si \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in t_{\mathcal{D}} \subset H^1(M, \text{ad } \rho)^{\text{Gal}(M/F)}, \text{ alors } a = d^\sigma \text{ et } b = c^\sigma.$$

L'action naturelle à gauche de  $\text{Gal}(H/F)$  sur  $G_H$  induit une action à droite donnée par  $x \rightarrow g^{-1}(x)$  pour laquelle  $H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  est un  $\bar{\mathbb{Q}}_p[\text{Gal}(H/F)]$ -module à gauche.

On a  $H^1(H, \text{ad } \rho) = H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_p} \text{ad } \rho$  (puisque  $\text{ad } \rho(G_H) = 1$ ).

Un élément de  $H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_p} \text{ad } \rho$  peut être écrit comme une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , où  $a, b, c$  et  $d$  sont des éléments de  $\text{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  et l'action naturelle à gauche de  $\text{Gal}(H/F)$  sur  $H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_p} \text{ad } \rho$  est donnée par

$$g \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \rho(g) \begin{pmatrix} g.a & g.b \\ g.c & g.d \end{pmatrix} \rho(g)^{-1}.$$

Ainsi, l'inflation restriction appliquée à l'extension galoisienne finie  $H/F$  induit l'isomorphisme suivant :

$$H^1(F, \text{ad } \rho) \simeq (\text{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes \text{ad } \rho)^{G'}.$$

**Corollaire 3.4.** *Dans la base  $(e_1, e_2)$ , on a :*

$$t_{\mathcal{D}} \simeq \ker \left( (\text{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes \text{ad } \rho)^{G'} \xrightarrow{(C_i^*)} \prod_{w_i, \mathfrak{p}_i | p} H^1(H_{w_i}, \bar{\mathbb{Q}}_p) \right)$$

*Démonstration.* Le résultat découle des lemmes 3.1 et 3.2

□

#### 4. APPLICATION DE LA THÉORIE DES CORPS DE CLASSES

##### 4.1. Rappel sur les unités locales et globales.

Si  $G$  est un groupe fini, on notera  $\hat{G}$  l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de  $G$  sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ .

Soient  $\mathcal{O}_H$  l'anneau des entiers de  $H$ ,  $M_p$  la  $p$ -extension abélienne maximale non ramifiée en dehors de  $p$  de  $H$  et  $\mathcal{O}_{H_w}$  l'anneau des entiers de la complétion  $H$  par

rapport à  $w$ , où  $w$  est la place de  $H$  au dessus de  $p$ . Soit  $H''$  le  $p$ -Hilbert de  $H$ , alors la théorie du corps de classes implique que

$$\text{Gal}(M_p/H'') \simeq \text{la } p\text{-partie de } (\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times / \bar{\mathcal{O}}_H^\times \simeq U_p^1 / \bar{\mathcal{O}}_H^\times,$$

où  $U_p^1 = \prod_{w|p} U_w^1$  et  $U_w^1$  est le groupe des unités de  $\mathcal{O}_{H_w}$  qui sont  $\equiv 1 \pmod{p}$ . Ainsi, on a la suite exacte suivante :

$$(6) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \longrightarrow \text{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p),$$

telle que la première application est le dual de la réciprocité d'Artin et la seconde est la restriction à  $\mathcal{O}_H^\times$  par rapport à l'inclusion diagonale  $\mathcal{O}_H^\times \hookrightarrow (\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times$ .

Tout morphisme continu pour la topologie  $p$ -adique de  $\text{Hom}(\mathcal{O}_{H,w}^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  est donné par

$$(7) \quad u \mapsto \sum_{g_w \in J_w} h_{g_w} g_w(\log_p(u)) = \sum_{g_w \in J_w} h_{g_w} \log_p(g_w(u)),$$

où  $h_{g_w}$  est un élément de  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ ,  $J_w$  est l'ensemble des plongements de  $H_w$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ , et  $\log_p$  est logarithme  $p$ -adique définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}_p^\times$ .

On note  $J_H$  l'ensemble des plongements de  $H$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}$ . Les deux plongements  $\iota_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$  et  $H \subset \bar{\mathbb{Q}}$  définissent une partition  $J_H = \coprod_{w|p} J_w$  provenant du diagramme commutatif suivant

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\iota_p} & \bar{\mathbb{Q}}_p \\ \uparrow g & & \uparrow g_w \\ H & \hookrightarrow & H_w. \end{array}$$

Dans l'introduction, on avait fixé des plongements complexes  $g_1, \dots, g_n$  de  $\bar{\mathbb{Q}}$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}$  qui relèvent les plongements de  $F$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}$  et tels que  $g_1$  est le plongement qui identifie  $F$  avec un sous-corps de  $\mathbb{R}$ . Donc on obtient la partition suivante :

$$(9) \quad J_H = \{g_i \circ g \mid 1 \leq i \leq n, g \in \text{Gal}(H/F)\} = \coprod_{1 \leq i \leq n} g_i \cdot \text{Gal}(H/F)$$

Ainsi, les éléments définis par

$(u \otimes 1 \mapsto \log_p(\iota_p \circ g_i \circ g(u)))$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $g \in \text{Gal}(H/F)$  forment une base du  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -espace vectoriel  $\text{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ . On a une action naturelle à gauche

de  $\text{Gal}(H/F)$  sur  $\text{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  donnée par

$$g' \cdot \log_p(\iota_p \circ g_i \circ g \otimes 1) = \log_p(\iota_p \circ g_i \circ g'g \otimes 1).$$

Par conséquent, il existe un isomorphisme canonique de  $G' = \text{Gal}(H/F)$ -modules à gauche :

$$(10) \quad \left( \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \bar{\mathbb{Q}}_p[G'] \xrightarrow{\sim} \text{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p) \right) \mapsto \left( \sum_{g \in G'} a_{i,gg} \right)_{1 \leq i \leq n} \mapsto \left( u \otimes 1 \mapsto \sum_{\substack{g \in G' \\ 1 \leq i \leq n}} a_{i,g} \log_p(\iota_p \circ g_i \circ g^{-1}(u)) \right).$$

On a les conjugaisons complexes  $\tau_1, \dots, \tau_n \in G_F$  telles que  $\tau_i$  est la conjugaison complexe attachée à  $g_i$  (i.e  $\tau_i$  est conjuguée à la conjugaison complexe  $c$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  par  $g_i$  et  $c = \tau_1$ ). Puisque  $\rho$  est impaire, alors  $\det \rho(\tau_i) = -1$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Soit  $\{\sigma_j^i\}_{1 \leq j \leq n'}$  un ensemble de représentants de toutes les classes d'équivalence du quotient de l'ensemble  $\{g_i \circ g | g \in \text{Gal}(H/F), 1 \leq i \leq n\}$  par la relation d'équivalence

$$c \circ h \sim h, \text{ où } h \in g_i G'.$$

D'après la preuve de Minkowski du théorème des unités de Dirichlet, il existe un plongement  $\mathcal{O}_H^\times / \mu \hookrightarrow \mathbb{R}^{nn'}$  donné par  $a \rightarrow (\log |\sigma_j^i(a)|)_{1 \leq j \leq n', 1 \leq i \leq n}$ , où  $\mu$  est le sous-groupe de torsion de  $\mathcal{O}_H^\times$ .

D'autre part, on a  $g_i(\tau_i(x)) = \overline{g_i(x)}$  et donc le  $G'$ -ensemble  $\{\sigma_j^i\}_{1 \leq j \leq n'}$  peut être vu comme la permutation des classes à droite du groupe  $\text{Gal}(H/F)$  suivant le sous-groupe  $\{1, \tau_i\}$ .

Ainsi, on obtient les décompositions de  $G'$ -modules :

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \left( \bigoplus_{\substack{\pi \neq 1 \\ \pi \in \widehat{G'}}} \pi^{\alpha_\pi} \right) \oplus 1^{n-1} \text{ et } \text{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \bigoplus_{\pi \in \widehat{G'}} \pi^{n \dim \pi}$$

où  $\pi$  parcourt l'ensemble des caractères de  $G' = \text{Gal}(H/F)$ ,  $\alpha_\pi = \sum_{i=1}^n \dim \pi^{+\tau_i}$  et les  $\pi^{+\tau_i}$ ,  $\pi^{-\tau_i}$  sont respectivement les espaces propres associés à l'action de la conjugaison complexe  $\tau_i \in G'$  pour les valeurs propres  $+1$  et  $-1$ .

D'autre part, on la décomposition de  $G'$ -modules :

$$\mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \bigoplus_{\pi \in \widehat{G'}} \pi^{m_\pi}.$$

En utilisant la suite exacte (6), on obtient une borne de  $m_\pi$  :

**Lemme 4.1.** *On a  $m_1 \geq 1$  et pour  $\pi \neq 1$ , on a  $\sum_{i=1}^n \dim \pi^{-\tau_i} \leq m_\pi$  avec égalité si la conjecture de Leopoldt est vraie pour  $H$ .*

#### 4.2. Une minoration de $\dim t_{\mathcal{D}^{ord}}^0$ .

L'inflation-restriction induit l'isomorphisme suivant

$$(11) \quad H^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) \simeq H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}]$$

où  $V[\psi_\heartsuit^{-1}]$  est le  $\psi_\heartsuit^{-1}$ -sous-espace propre de la  $\mathrm{Gal}(H/M)$ -représentation  $V$ .

**Proposition 4.2.** *Supposons que  $M$  a  $2r$  plongements complexes et le caractère  $\psi_\heartsuit^2$  est non trivial. Alors :*

$$2[F : \mathbb{Q}] - r \leq \dim H^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}).$$

*Démonstration.* Puisque le caractère  $\psi_\heartsuit^2$  est non trivial,  $\pi = \mathrm{Ind}_M^F(\psi_\heartsuit^{-1})$  est irréductible, donc :

$$\dim H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}] = \dim \mathrm{Hom}_{G'}(\pi, H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)) = m_\pi.$$

On note  $(\tau_{i_k})_{1 \leq k \leq r}$  (resp.  $(\tau_{i'_l})$ ) les conjugaisons complexes de  $G_F$  qui se prolongent en plongements complexes (resp. réels) de  $M$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}$ . On voit que  $\det(\pi)(\tau_{i_k}) = -1$ ,  $\det(\pi)(\tau_{i'_l}) = 1$ ,  $\dim \pi^{-\tau_{i_k}} = 1$  et  $\dim \pi^{-\tau_{i'_l}} = 2$ .

D'après le lemme 4.1, on a  $2[F : \mathbb{Q}] - r \leq m_\pi$ , et on conclut par l'isomorphisme (11). □

**Lemme 4.3.** *Soit  $\mathfrak{p}_i$  un premier de  $F$  au dessus de  $p$  qui se décompose dans  $M$  en  $v_i$  et  $v_i^\sigma$ , alors  $\dim H^1(M_{v_i}, \psi_\heartsuit^{-1}) = e_i \cdot f_i$ .*

*Démonstration.* La  $p$ -régularité de  $\rho$  implique que  $H^0(M_{v_i}, \psi_\heartsuit^{-1}) = 0$ . D'après la dualité locale de Tate,

$$H^2(M_{v_i}, \psi_\heartsuit^{-1}) \simeq H^0(M_{v_i}, \psi_\heartsuit^{-1}(1))^\vee = 0.$$

Finalement, la formule de Tate de la caractéristique d'Euler locale implique

$$\dim H^1(M_{v_i}, \psi_{\heartsuit}^{-1}) = [F_{\mathfrak{p}_i} : \mathbb{Q}_p] = e_i \cdot f_i.$$

□

On note  $I \subset S_p$  (resp.  $I' \subset S_p$ ) l'ensemble des plongements qui induisent des premiers  $\mathfrak{p}_i \mid p$  de  $F$  tels que  $\psi^\sigma(\text{Frob}_{v_i}) = \alpha_i$  (resp.  $\psi(\text{Frob}_{v_i}) = \alpha_i$ ) où  $U_{\mathfrak{p}_i} \cdot f = \alpha_i f$ .

**Remarque 4.4.** La base  $(e_1, e_2)$  telle que  $\rho|_{G_M} = \psi \oplus \psi^\sigma$  est définie à des scalaires près (i.e.  $(e_1, e_2) \sim (\mu e_1, \mu' e_2)$  où  $(\mu, \mu') \in (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^2$ ). Si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H^1(M, \text{ad } \rho)^{\text{Gal}(M/F)}$  dans la base  $(e_1, e_2)$ , alors un changement de la base  $(e_1, e_2)$  à des scalaires près ne modifiera pas  $a$  et  $d$  et modifiera  $c$  et  $b$  par multiplication de scalaires.

Si  $\mathfrak{p}_i$  est inerte ou ramifié dans  $M$ , alors par ordinarité en  $p$ ,  $\psi$  est non ramifié en  $v_i$  et  $\psi|_{G_{M_{v_i}}} = \psi|_{G_{M_{v_i}}}^\sigma$ . Il en découle que  $v_i$  se décompose complètement dans  $H$  et que  $\psi_i''/\psi_i'$  est le caractère quadratique de  $\text{Gal}(M_{v_i}/F_{\mathfrak{p}_i})$ . Ainsi, si  $\mathfrak{p}_i \in S^p$ , en normalisant la base  $(e_1, e_2)$  de sorte que  $\rho(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ , où  $\sigma_0$  est un élément fixé non trivial du groupe  $\text{Gal}(H_{w_i}/F_{\mathfrak{p}_i})$ . On notera que  $\rho(\sigma_0)$  est diagonal dans la base  $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ . Donc on peut supposer que  $(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = (e'_{i,1}, e'_{i,2})$  (voir [7, §4]). En effet, avec les notations de la section §3.1, un calcul direct montre que le morphisme de la relation (2) est donné dans la base  $(e_1, e_2)$  par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{(C_i^*, D_i^*)} \left( \frac{a - c + b - d}{2}, \frac{a - c - b + d}{2} \right)$$

De plus  $\sigma_0$  échange  $b|_{G_M}$  et  $c|_{G_M}$ . Ainsi, si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in t_{\mathcal{D}^{ord}}$ , alors

$$(12) \quad c_{v_i}^{\sigma_0} - a_{v_i}^{\sigma_0} = c_{v_i} - a_{v_i} \text{ et } a_{v_i}^{\sigma_0} + a_{v_i} - c_{v_i}^{\sigma_0} - c_{v_i} = 0$$

avec  $c_{v_i} = i(c)$  et  $a_{v_i} = j(a)$ , où  $i$  et  $j$  sont les restrictions suivantes :

$$(13) \quad c \in H^1(M, \psi_{\heartsuit}^{-1}) \xrightarrow{i} \text{im} (H^1(M_{v_i}, \bar{\mathbb{Q}}_p) \rightarrow H^1(I_{v_i}, \bar{\mathbb{Q}}_p)) \xleftarrow{j} H^1(M, \bar{\mathbb{Q}}_p) \ni a.$$

Pour calculer  $t_{\mathcal{D}^{ord}}^0$ , on doit rajouter la condition  $a + d = 0$  qui est équivalente à  $d^\sigma = -d$ .

**Proposition 4.5.** On suppose que :

(i) Le corps  $M$  a  $2r$  plongements complexes.

(ii) Le caractère  $\psi_{\heartsuit}^2$  est non trivial.

Alors  $\dim t_{\mathcal{D}^{ord}}^0 \geq [F : \mathbb{Q}] - r - |S^p| - \sum_{\mathfrak{p}_i \in S^p} f_i \cdot e_i$ .

*Démonstration.* Soit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un 1-cocycle de  $t_{\mathcal{D}^{ord}}^0$  dans la base  $(e_1, e_2)$ . D'après le corollaire 3.3, on a  $a = d^\sigma$ . De plus, si  $a = d = 0$ , alors les équations (12) impliquent que  $c_{v_i} = 0$  pour tout premier  $\mathfrak{p}_i$  de  $F$  inerte ou ramifié dans  $M$ .

Puisque  $S_p = I \sqcup I'$ , le corollaire 3.4 et les équations (12) impliquent que  $c$  (resp.  $b$ ) est non ramifié en  $\mathfrak{p}_i \in I$  (resp.  $\mathfrak{p}_i \in I'$ ) et puisque  $\sigma$  échange  $b$  et  $c$ , on obtient l'inclusion suivante

$$(14) \quad \ker \left( H^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) \xrightarrow{(C^*)} \prod_{\mathfrak{p}_i \in I} H^1(M_{v_i}, \psi_\heartsuit^{-1}) \prod_{\mathfrak{p}_i \in I'} H^1(M_{v_i}^\sigma, \psi_\heartsuit^{-1}) \prod_{\mathfrak{p}_i \in S^p} H^1(M_{v_i}, \bar{\mathbb{Q}}_p) \right) \subset t_{\mathcal{D}^{ord}}^0$$

D'après les lemmes 4.2, 4.3 et le fait que  $\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_p} \text{Hom}(G_{M_{v_i}}, \bar{\mathbb{Q}}_p) = 2e_i \cdot f_i + 1$  si  $\mathfrak{p}_i$  est inerte où ramifié dans  $M$ , on a la minoration suivante

$$\dim t_{\mathcal{D}^{ord}}^0 \geq [F : \mathbb{Q}] - r - |S^p| - \sum_{\mathfrak{p}_i \in S^p} f_i \cdot e_i.$$

□

## 5. CALCUL DE LA DIMENSION DES ESPACES TANGENTS DE $\mathcal{D}$ , $\mathcal{D}^{ord}$ ET $\mathcal{D}_{\det \rho}^{ord}$

Dans cette section, on calcule les dimensions des espaces tangents des foncteurs  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}^{ord}$  et  $\mathcal{D}_{\det \rho}^{ord}$  dans le cas où  $M$  est totalement réel ou totalement complexe sous certaines conditions sur  $\rho$  pour ce dernier cas.

### 5.1. Le cas où $M$ est totalement réel.

On suppose dans cette sous-section que  $M$  est totalement réel et on considère la condition suivante sur  $M$  :

- $(\mathbf{L}_M)$  la conjecture de Leopoldt est vraie pour  $M$ .

Puisque  $\det \rho(\tau_i) = -1$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  (i.e  $\rho$  est totalement impaire), alors  $\psi_\heartsuit^{-1}(\tau_i) = -1$  pour les conjugaisons complexes  $(\tau_i)_{\{1 \leq i \leq n\}}$  de  $G_F$ .

En conséquence, les conjugaisons complexes  $(\tau_i)_{\{1 \leq i \leq n\}}$  définissent le même élément  $c$  du groupe  $\text{Gal}(H/M)$  et  $c$  est dans le centre de  $\text{Gal}(H/F)$ . Ainsi, le sous-corps  $H_+$  de  $H$  fixé par  $c$  est totalement réel et  $H$  est un corps CM.

En généralisant les techniques de [12, théorème 3.1], on obtient la proposition suivante.

#### Proposition 5.1.



(i) *Il existe un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}\left(\prod_{w|p} U_w^1 / \bar{\mathcal{O}}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)[\psi_\heartsuit^{-1}] \simeq H^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}).$$

(ii) *La projection canonique  $\prod_{w|p} U_w^1 \twoheadrightarrow \prod_{w|p} U_w^1 / \bar{\mathcal{O}}_H^\times$  induit un isomorphisme entre les  $\psi_\heartsuit^{-1}$ -espaces propres*

$$\mathrm{Hom}\left(\prod_{w|p} U_w^1, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)[\psi_\heartsuit^{-1}] \simeq \mathrm{Hom}\left(\prod_{w|p} U_w^1 / \bar{\mathcal{O}}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)[\psi_\heartsuit^{-1}].$$

*Démonstration.*

(i) D'après la suite exacte (6) et l'isomorphisme (11), on a

$$H^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) \simeq \mathrm{Hom}\left(\prod_{w|p} U_w^1 / \bar{\mathcal{O}}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)[\psi_\heartsuit^{-1}].$$

(ii) Soit  $\varrho$  un élément de  $\mathrm{Hom}(\prod_{w|p} U_w^1, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}]$ . Pour tout  $g$  dans  $\prod_{w|p} U_w^1$ , on a :

$$\begin{aligned} (15) \quad \varrho(g) &= \psi_\heartsuit^{-1}(c)\varrho(c(g)) \\ &= -\varrho(c(g)) \end{aligned}$$

De plus,  $H$  est un corps CM et donc le groupe quotient  $\mathcal{O}_H^\times / \mathcal{O}_{H_+}^\times$  est d'ordre fini ( $H_+ = H^c \subset \mathbb{R}$ ). Maintenant, on peut voir que la relation (15) implique que  $\forall x \in \mathcal{O}_{H_+}^\times$ , on a  $\varrho(x) = -\varrho(c(x)) = -\varrho(x)$ , donc  $\varrho$  se factorise sur  $\mathcal{O}_{H_+}^\times$  et puisque le groupe  $\mathcal{O}_H^\times / \mathcal{O}_{H_+}^\times$  est d'ordre fini,  $\varrho$  se factorise sur  $\mathcal{O}_H^\times$ . De là, on obtient l'isomorphisme voulu. □

**Proposition 5.2.** *Avec les notations de (12), on a :*

- (i) *Si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in t_{\mathcal{D}} \subset H^1(M, \mathrm{ad} \rho)^{\mathrm{Gal}(M/F)}$ , alors  $a = a^\sigma$ .*
- (ii) *Soit  $\mathfrak{p}_i$  un premier de  $F$  qui est inerte ou ramifié dans  $M$ , alors  $c_{v_i} = c_{v_i}^{\sigma_0}$ .*
- (iii) *Soient  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in t_{\mathcal{D}^{ord}}^0 \subset H^1(M, \mathrm{ad}^0 \rho)^{\mathrm{Gal}(M/F)}$  et  $\mathfrak{p}_i$  un premier de  $F$  qui est inerte ou ramifié dans  $M$ , alors  $c_{v_i}$  et  $a_{v_i}$  sont non ramifiés.*

*Démonstration.* (i) L'hypothèse  $(\mathbf{L}_M)$  implique que  $M.\mathbb{Q}_\infty$  est l'unique  $\mathbb{Z}_p$ -extension de  $M$  et donc  $a = a^\sigma$ .

(ii) Il découle de la proposition 3.4, de (i) et de (12) que  $c_{v_i} = c_{v_i}^{\sigma_0}$ .

(iii) L'énoncé (i) implique que  $d = 0$ , par conséquent, (ii) et (12) impliquent que  $c_{v_i}$  est trivial. □

**Théorème 5.3.** *On suppose que  $M$  est totalement réel, alors :*

- (i) *La dimension de  $t_{\mathcal{D}}$  est  $[F : \mathbb{Q}] + 1$  et la dimension de  $t_{\mathcal{D}^{ord}}$  est  $\max\{1, \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i \cdot e_i\}$ .*
- (ii) *On a l'isomorphisme suivant*

$$t_{\mathcal{D}^{ord}}^0 \simeq \text{Hom}\left(\prod_{w|v_i^\sigma, \mathfrak{p}_i \in I} U_w^1 \prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in I'} U_w^1, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)[\psi_\varphi^{-1}]$$

$$\text{et } \dim t_{\mathcal{D}^{ord}}^0 = \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i \cdot e_i.$$

*Démonstration.* i) Soit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un élément de  $t_{\mathcal{D}} \subset H^1(F, \text{ad } \rho)^{\text{Gal}(H/F)}$ . D'après la décomposition (5) et le corollaire 3.3, il suffit de déterminer la dimension des espaces vectoriels où vivent  $d$  et  $c$ .

La décomposition (5) implique que  $d \in \text{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  et puisque la condition  $(\mathbf{L}_M)$  est vérifiée, alors  $\dim \text{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}}_p) = 1$ .

D'autre part,  $\sigma$  échange  $b$  et  $c$  et échange aussi  $v_i^\sigma$  et  $v_i$  quand  $\mathfrak{p}_i \in S_p = I' \sqcup I$ . D'après l'isomorphisme (10), les propositions 3.4, 5.1, 5.2 et le fait que  $\text{Gal}(H/M)$  permute les places de  $H$  au dessus de  $v_i$ , on a :

$$(16) \quad c \in \text{Hom}\left(\prod_{w|v_i^\sigma, \mathfrak{p}_i \in I} U_w^1 \prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in I'} U_w^1, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)[\psi_\varphi^{-1}] \oplus \left(\text{Hom}\left(\prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in S^p} U_w^1, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)[\psi_\varphi^{-1}]\right)^{\text{Gal}(M_{v_i}/F_{\mathfrak{p}_i})}$$

$$\dim \text{Hom}\left(\prod_{w|v_i^\sigma, \mathfrak{p}_i \in I} U_w^1 \prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in I'} U_w^1, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)[\psi_\varphi^{-1}] \oplus \left(\text{Hom}\left(\prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in S^p} U_w^1, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)[\psi_\varphi^{-1}]\right)^{\text{Gal}(M_{v_i}/F_{\mathfrak{p}_i})} = [F : \mathbb{Q}]$$

Donc,  $\dim t_{\mathcal{D}} = [F : \mathbb{Q}] + 1$ .

Si on suppose de plus que  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in t_{\mathcal{D}^{ord}}$ , on doit ajouter la condition supplémentaire (12) quand  $\mathfrak{p}_i \in S^p$  et  $d_{v_i}$  est non ramifié quand  $\mathfrak{p}_i \in S_p$ . On procède cas par cas :

Si  $S_p \neq \emptyset$ , alors  $d$  est non ramifié en une place de  $M$  au dessus de  $p$  et il en découle que  $d$  est trivial (puisque on a supposé la condition  $(\mathbf{L}_M)$ ). Ainsi, la proposition 5.2 et la relation (12) impliquent que  $c_{v_i}$  est trivial quand  $\mathfrak{p}_i \in S^p$ . Donc, (16) implique que  $\dim t_{\mathcal{D}^{ord}} = |I'_F| = \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i \cdot e_i$ .

Si  $S_p$  est vide, les relations (12) et  $d \in \text{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}})$  impliquent que  $\dim t_{\mathcal{D}^{ord}} = 1$ .

ii) Finalement, si on suppose que  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in t_{\mathcal{D}^{ord}}^0$ , alors les relations (16) et (12) et la proposition 5.2 impliquent l'isomorphisme désiré et donc  $\dim t_{\mathcal{D}^{ord}}^0 = |I'_F| = \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i \cdot e_i$ .

□

### 5.2. Le cas où $H$ est Galois et diédral sur $\mathbb{Q}$ .

On a sous les hypothèses du Théorème 1.3 le diagramme suivant

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} & H & \\ & | & \\ & F.K = M & \\ / & & \backslash \\ K & & F \\ \backslash & & / \\ & \mathbb{Q} & \end{array}$$

Le groupe de Galois  $\text{Gal}(H/\mathbb{Q})$  est diédral et les extensions  $M/F$ ,  $M/K$  et  $K/\mathbb{Q}$  sont quadratiques ( $K$  est imaginaire).

La restriction  $\text{Gal}(M/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  induit un isomorphisme  $\text{Gal}(M/F) \simeq \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  et donc l'ensemble  $S^p$  est vide (puisque  $p$  se décompose dans  $K$ ).

On note  $G$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(H/\mathbb{Q})$ . Avec les notations utilisées dans la relation (10), tout élément de  $\text{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  est de la forme

$$u \otimes 1 \mapsto \sum_{g \in G} h_g \log_p(g^{-1}(u \otimes 1))$$

pour  $h_g \in \bar{\mathbb{Q}}_p$ . De plus, la  $G$ -représentation régulière  $\bar{\mathbb{Q}}_p[G] = \text{Hom}((\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{O}_H)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  est isomorphe à  $\bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \pi^{\dim \pi}$ , où  $\pi$  parcourt l'ensemble des caractères du groupe  $G$ .

D'autre part, on a la décomposition de  $G$ -modules :

$$(18) \quad H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \bigoplus_{\pi} \pi^{m_{\pi}},$$

où  $\pi$  parcourt l'ensemble des caractères de  $G$ . D'après la preuve de Minkowski du théorème des unités de Dirichlet, il existe un isomorphisme de  $G$ -modules

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \pi^{\dim \pi^+},$$

où  $\pi^+$  et  $\pi^-$  sont les sous-espaces propres pour l'action de la conjugaison complexe  $c \in G$ .

**Lemme 5.4.** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

- (i)  $m_\pi = \dim \pi^-$  pour  $\pi \neq 1$  et  $m_1 = 1$ .
- (ii)  $\dim \pi \leq 2$  pour tout caractère  $\pi$  de  $G$ . De plus, si  $\dim \pi = 2$ , alors  $\pi = \text{Ind}_K^\mathbb{Q} \psi$ , où  $\psi : G_K \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$  est un caractère.

*Démonstration.* (i) Puisque  $K$  est un corps quadratique imaginaire et  $H$  est une extension abélienne de  $K$ , la conjecture de Leopoldt est vraie pour  $H$  d'après Ax-Baker-Brumer [9]. Par conséquent, le dernier morphisme de la suite exacte (6) est surjectif et donc  $m_\pi = \dim \pi^-$ .

- (ii) L'assertion découle immédiatement du fait que  $G$  est un groupe diédral.  $\square$

**Théorème 5.5.** *On a :*

- (i)  $\dim H^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) = [F : \mathbb{Q}]$ .
- (ii)  $\ker \left( H^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}_i | p} H^1(M_{v_i}, \psi_\heartsuit^{-1}) \right)$  est trivial.

*Démonstration.*

(i) Nos hypothèses impliquent que  $\text{Gal}(H/K)$  est cyclique et que  $\text{Gal}(H/M)$  est un sous-groupe de  $\text{Gal}(H/K)$  d'indice égal à  $[F : \mathbb{Q}]$  (où  $[F : \mathbb{Q}] = 2$ ), donc il existe 2 caractères  $(\psi_i)_{1 \leq i \leq 2} : G_K \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$  qui prolongent  $\psi_\heartsuit^{-1}$  à  $\text{Gal}(H/K)$ . De plus, le lemme 5.4 implique que  $(\text{Ind}_K^\mathbb{Q} \psi_i)_{\{1 \leq i \leq 2\}}$  sont les représentations de  $\text{Gal}(H/\mathbb{Q})$  qui prolonge la  $\text{Gal}(H/F)$ -représentation  $\text{Ind}_M^F \psi_\heartsuit^{-1}$  à  $\text{Gal}(H/\mathbb{Q})$ .

Puisque  $\det \text{Ind}_K^\mathbb{Q} \psi_i(c) = -1$ , le lemme 5.4 implique que la représentation irréductible  $\text{Ind}_\mathbb{Q}^K \psi_i$  apparaît avec une multiplicité égale à 1 dans la décomposition de  $G$ -modules (18). Par conséquent, la multiplicité de  $\text{Ind}_M^F \psi_\heartsuit^{-1}$  dans la  $\text{Gal}(H/F)$ -représentation  $H^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  est égale à 2, et puisque  $\pi' = \text{Ind}_M^F(\psi_\heartsuit^{-1})$  est irréductible, alors

$$\dim H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}] = \dim \text{Hom}_{\text{Gal}(H/F)}(\pi', H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)) = 2$$

Ainsi, le résultat désiré découle de l'isomorphisme (11).

- (ii) D'après le lemme 5.4

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_K^\mathbb{Q} \psi_i, H^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)) = \dim H^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_i] = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq 2$$

Maintenant, pour tout  $1 \leq i \leq 2$ , choisissons un générateur  $f_i$  de  $H^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_i]$ . On peut voir que les 1-cocycles  $(f_i)_{1 \leq i \leq 2}$  sont des éléments du groupe de cohomologie  $H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}]$  (puisque  $\psi_i$  prolonge  $\psi_\heartsuit^{-1}$  à  $\text{Gal}(H/K)$ ).

D'autre part, puisque  $f_i \in \text{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ , alors  $f_i$  est de la forme suivante :

$$u \otimes 1 \mapsto \sum_{g \in \text{Gal}(H/\mathbb{Q})} a_g^i \log_p(g^{-1}(u)).$$

Or  $f_i$  est un élément du  $\psi_i$ -espace propre  $\text{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ , alors :

$$a_g^i = \psi_i^{-1}(g)a_1^i \text{ et } a_{cg}^i = \psi_i^{-1}(g)a_c^i \text{ pour tout } g \in \text{Gal}(H/K)$$

Soit  $w_0$  (resp.  $v$ ) la place première de  $H$  (resp.  $K$ ) au dessus de  $p$  induite par  $\iota_p$ . Si l'image de  $f_i$  dans  $\text{Hom}(\mathcal{O}_{H_{w_0}}^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  est triviale, par la preuve de Minkowski du théorème des unités de Dirichlet, on sait que tout élément de  $\text{Hom}(\prod_{w|v^\sigma} \mathcal{O}_{H,w}^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  qui est trivial sur les unités globales doit se factoriser à travers la norme, donc  $f_i$  n'appartient pas au  $\psi_i$ -espace propre. Par conséquent l'espace vectoriel

$$\ker(H^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_i] \rightarrow H^1(G_{H_{w_0}}, \bar{\mathbb{Q}}_p))$$

est trivial et de là en déduit que  $a_1^i$  et  $a_c^i$  sont non nuls, puisque  $\sigma$  échange les groupes de décomposition  $G_{H_{w_0}}$  et  $G_{H_{\sigma(w_0)}}$  ( $\sigma = c$ ).

Si  $t_0$  est un générateur du groupe cyclique  $\text{Gal}(H/K)$  et  $n'$  le cardinal de  $\text{Gal}(H/K)$ , alors pour tout  $1 \leq i \leq 2$  on a

$$f_i = a_1^i \sum_{0 \leq j \leq n'-1} \psi_i^{-1}(t_0^j) \log_p(t_0^{-j}(\cdot)) + a_c^i \sum_{0 \leq j \leq n'-1} \psi_i^{-1}(t_0^j) \log_p(t_0^{-j}c(\cdot)).$$

Par conséquent, en écrivant les 1-cocycles  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq 2}$  dans la base  $\{\log_p(g^{-1}(\cdot))_{g \in G}\}$ , on peut extraire une sous-matrice de Vandermonde  $A = (\psi_i^{-1}(t_0^{j-1}))_{\{1 \leq i, j \leq 2\}}$ . Puisque  $\psi_i \neq \psi_j$  pour  $i \neq j$ , alors  $\det A \neq 0$ . Donc, les 1-cocycles  $\{f_i\}_{\{1 \leq i \leq 2\}}$  forment une base de  $H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}]$  et puisque  $a_1^i$  et  $a_c^i$  sont non nuls, on ne peut pas trouver une combinaison linéaire des  $f_i$  ( $1 \leq i \leq 2$ ) qui est triviale sur tous les groupes de décomposition de  $G_H$  aux places  $\{w_i\}_{\mathfrak{p}_i \in S_p}$ , donc le  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -espace vectoriel

$$\ker \left( \text{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}] \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}_i | p} \text{Hom}(G_{H_{w_i}}, \bar{\mathbb{Q}}_p) \right)$$

est trivial. Finalement, on peut conclure grâce au lemme 3.2.

□

**Corollaire 5.6.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3, on a :*

- (i) *L'espace vectoriel  $t_{\mathcal{D}_{ord}}^0$  est trivial.*
- (ii) *La dimension de l'espace tangent  $t_{\mathcal{D}}$  est  $[F : \mathbb{Q}] + 1$ .*

*Démonstration.*

(i) Puisque  $S^p$  est vide, alors l'inclusion (14) devient un isomorphisme car  $a = d^\sigma = -d \in \text{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  et donc c'est un morphisme non ramifié en les premiers au dessus de  $p$ , ainsi  $a = 0$ . Donc l'assertion découle immédiatement de la relation (14) et du Théorème 5.5.

(ii) D'après l'assertion (i), il existe un isomorphisme  $t_{\mathcal{D}} \simeq \text{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ . D'autre part, puisque  $M$  est une extension totalement complexe de  $\mathbb{Q}$  de degré  $2[F : \mathbb{Q}]$  et que la conjecture de Leopoldt est vraie pour  $H$ ,  $M$  possède trois  $\mathbb{Z}_p$ -extensions indépendantes et  $\dim \text{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}}_p) = [F : \mathbb{Q}] + 1$ . □

## 6. PREUVES DES ISOMORPHISMES $\mathcal{R} \simeq \mathcal{T}$

On va démontrer dans cette section les théorèmes 1.1, 1.3 et 1.4.

La variété rigide de Hecke-Hilbert  $\mathcal{E}$  est réduite et équidimensionnelle de dimension  $[F : \mathbb{Q}] + 1$ , donc  $\mathcal{E}$  est lisse en  $x$  si, et seulement si, l'espace tangent de  $\mathcal{T}$  est de dimension  $[F : \mathbb{Q}] + 1$ . De plus, le morphisme  $\kappa$  est étale en  $x$  si, et seulement si, l'anneau local  $\mathcal{T}'$  de la fibre de  $\kappa(x)$  en  $x$  est isomorphe à  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ .

### 6.1. Le lieu quasi-ordinaire de la variété de Hecke-Hilbert $\mathcal{E}$ .

Dans la proposition suivante, on montre qu'on a une déformation quasi-ordinaire de  $\rho$  en  $p$  à valeurs dans  $\mathcal{T}$ .

#### Proposition 6.1.

(i) *Il existe une représentation continue*

$$\rho_{\mathcal{T}} : G_{F, np} \rightarrow \text{GL}_2(\mathcal{T}),$$

*telle que  $\text{Tr } \rho_{\mathcal{T}}(\text{Frob}_\ell) = T_\ell$  pour tout  $\ell \nmid np$ . La réduction de  $\rho_{\mathcal{T}}$  modulo  $\mathfrak{m}_{\mathcal{T}}$  est isomorphe à  $\rho$ .*

(ii) *La déformation  $\rho_{\mathcal{T}}$  est quasi-ordinaire en  $p$ .*

*Démonstration.*

(i) Même preuve que la proposition [7, 6.1].

(ii) D'après [11, 6.3.6], il existe un ouvert affinoïde de  $\Omega$  de  $\mathcal{E}$  contenant  $x$  tel que l'application  $z \rightarrow |U_p(z)|_p$  est constante et égale à 1 sur  $\Omega(\mathbb{C}_p)$ , où  $w(\Omega)$  est un ouvert affinoïde de  $\mathcal{W}_F$ ,  $\kappa : \Omega \rightarrow w(\Omega)$  est fini et de restriction surjective sur chaque

composante irréductible de  $\Omega$ . Puisque le lieu quasi-ordinaire  $\mathcal{E}^{n,ord}$  de  $\mathcal{E}$  est la fibre générique de l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire en  $p$  induite par les opérateurs de Hecke  $T_\ell$  et  $U_{\mathfrak{p}_i}$  où  $\mathfrak{p}_i \mid p$  et  $\ell \nmid p\mathfrak{n}$  et que l'anneau  $\mathcal{T}$  est équidimensionnel, alors les idéaux minimaux de  $\mathcal{T}$  correspondent aux familles de Hida quasi-ordinaires en  $p$ .

Soient  $V_{\mathcal{T}}$  le  $\mathcal{T}$ -module de rang 2 sur lequel  $G_F$  agit par  $\rho_{\mathcal{T}}$  et  $(K_i)_{1 \leq i \leq r}$  la famille des corps obtenus par la localisation de  $\mathcal{T}$  en ses idéaux minimaux et posons  $V_i = V \otimes_{\mathcal{T}} K_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ).  $V_i$  est un  $K_i[G_{F, \mathfrak{n}p}]$ -module et est la représentation galoisienne d'une famille de Hida quasi-ordinaire en  $p$  qui se spécialise en  $f$ . D'après un résultat de [24], pour tout  $\mathfrak{p}_k \mid p$  il existe une suite exacte courte de  $K_i[G_{F_{\mathfrak{p}_k}}]$ -modules :

$$0 \rightarrow V_i^+ \rightarrow V_i \rightarrow V_i^- \rightarrow 0,$$

où  $V_i^-$  est une droite sur laquelle  $G_{F_{\mathfrak{p}_k}}$  agit par le caractère  $\delta_{\mathfrak{p}_k}$  qui envoie  $[y, F_{\mathfrak{p}_k}]$  sur l'opérateur de Hecke  $T(y)$ , où  $[\cdot, F_{\mathfrak{p}_k}] : \widehat{F_{\mathfrak{p}_k}^\times} \rightarrow G_{F_{\mathfrak{p}_k}}^{ab}$  est le symbol local d'Artin. Puisque  $\rho$  est  $p$ -régulière et  $\delta_{\mathfrak{p}_k}$  relève le caractère  $\psi_k''$ , on peut conclure par le même argument que celui utilisé dans la proposition [7, 6.1] que  $\rho_{\mathcal{T}}$  est quasi-ordinaire en  $p$ .

□

## 6.2. Surjection de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{T}$ .

D'après la proposition 6.1, la représentation  $\rho_{\mathcal{T}}$  induit un morphisme local continu de  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -algèbres

$$(19) \quad \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{T}.$$

Soit  $A$  un anneau local Artinien d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_A$  et de corps résiduel  $A/\mathfrak{m}_A = \bar{\mathbb{Q}}_p$ . Toute déformation de  $\det(\rho)$  (resp.  $(\det \rho, (\psi_i'')_{\mathfrak{p}_i|p})$ ) à valeurs dans  $A^\times$  est équivalente à un morphisme continu de  $G_{F, \mathfrak{n}p}$  (resp.  $G_{F, \mathfrak{n}p} \times (\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^\times$ ) vers  $1 + \mathfrak{m}_A$ .

D'autre part, la restriction de la déformation universelle  $\rho_{\mathcal{R}}$  à  $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$  pour tout  $\mathfrak{p}_i \mid p$  est une extension d'un caractère  $\psi_{i, \mathcal{R}}''$  qui relève  $\psi_i''$  par un caractère  $\psi_{i, \mathcal{R}}'$  qui relève  $\psi_i'$ . D'après la théorie du corps de classes et puisque  $1 + \mathfrak{m}_A$  ne contient pas d'élément d'ordre fini, l'anneau universel qui représente les déformations de  $\det \rho$  (resp.  $\det \rho \times (\psi_i'')_{\{\mathfrak{p}_i|p\}}$ ) est donné par  $\bar{\mathbb{Q}}_p[[1 + p\mathbb{Z}_p]]$  (resp.  $\bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, \dots, T_{n+1}]]$ ). De plus,  $\mathcal{R}^{ord}$  (resp.  $\mathcal{R}$ ) a une structure de  $\bar{\mathbb{Q}}_p[[1 + p\mathbb{Z}_p]]$ -algèbre (resp.  $\bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, \dots, T_{n+1}]]$ -algèbre) donnée par la déformation  $\det \rho_{\mathcal{R}^{ord}}$  (resp.  $(\det \rho_{\mathcal{R}}, (\psi_{i, \mathcal{R}}'')_{\{\mathfrak{p}_i|p\}})$ ) de  $\det \rho$  (resp.  $(\det \rho, (\psi_i'')_{\mathfrak{p}_i|p})$ ).

L'action de  $\Lambda$  sur l'anneau  $\mathcal{T}$  donnée par le morphisme poids  $\kappa$  est compatible avec l'action induite par les caractères  $\det \rho_{\mathcal{T}}$  et ceux donnés par l'image de  $\psi_{i, \mathcal{R}}''$  via le

morphisme (19) (voir [24]). Ainsi, le morphisme (19) est  $\Lambda$ -linéaire et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, \dots, T_{n+1}]] & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & \longrightarrow & \mathcal{T}. \end{array}$$

**Lemme 6.2.** *Le morphisme naturel  $\bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, \dots, T_{n+1}]] \rightarrow \Lambda$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.*

Puisque l'anneau  $\Lambda$  est équidimensionnel de dimension  $n + 1$ , la surjection

$$\bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, \dots, T_{n+1}]] \rightarrow \Lambda$$

est un isomorphisme d'anneaux réguliers. □

**Proposition 6.3.** *Le morphisme (19) est surjectif.*

*Démonstration.*

Puisque  $\mathcal{T}$  est topologiquement engendré sur  $\Lambda$  par  $U_{\mathfrak{p}}$  pour tout  $\mathfrak{p} \mid p$  et  $T_\ell$  pour  $\ell \nmid np$ , il suffit de montrer que ces éléments sont dans l'image de  $\mathcal{R}$  via le morphisme (19).

Pour  $\ell \nmid np$ ,  $T_\ell = \text{Tr } \rho_{\mathcal{T}}(\text{Frob}_\ell)$  est l'image de la trace de  $\rho_{\mathcal{R}}(\text{Frob}_\ell)$ .

D'autre part, la restriction de  $\rho_{\mathcal{R}}$  à  $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$  pour tout  $\mathfrak{p}_i \mid p$  est une extension du  $\psi''_{i,\mathcal{R}}$  par le caractère  $\psi'_{i,\mathcal{R}}$ , où l'image du caractère  $\psi_{i,\mathcal{R}''}$  dans  $\mathcal{T}$  est le caractère  $\delta_{\mathfrak{p}_i}$  qui envoie  $[y, F_{\mathfrak{p}_i}]$  sur l'opérateur de Hecke  $T(y)$  où  $[\cdot, F_{\mathfrak{p}_i}] : \widehat{F_{\mathfrak{p}_i}^\times} \rightarrow G_{F_{\mathfrak{p}_i}}^{ab}$  est le symbol d'Artin. Ainsi,  $U_{\mathfrak{p}_i} = [\pi_{\mathfrak{p}_i}, F_{\mathfrak{p}_i}]$  est dans l'image du morphisme (19) pour une certaine uniformisante  $\pi_{\mathfrak{p}_i}$  du corps complet  $F_{\mathfrak{p}_i}$ . □

D'après la proposition 6.2,  $\Lambda$  représente le problème de déformation de  $(\det \rho, (\psi''_i)_{\mathfrak{p}_i|p})$  aux éléments inversibles d'une  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -algèbre artinienne  $A$ . Donc, le foncteur oubli des déformations de  $(\det \rho, (\psi''_i)_{\mathfrak{p}_i|p})$  aux déformations  $\det \rho$  induit la surjection suivante :

$$\Lambda \twoheadrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p[[1 + p\mathbb{Z}_p]].$$

Le noyau  $\mathcal{I}^{aug}$  de la surjection ci-dessus est appelé l'idéal d'augmentation.

On rappelle que

$$\mathcal{T}^{ord} = \mathcal{T} / \mathcal{I}^{aug} \mathcal{T}$$



En utilisant le même argument, on obtient l'isomorphisme suivant :

$$(20) \quad \mathcal{R}/\mathcal{I}^{aug}\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}^{ord}$$

On note  $\mathcal{R}'$  le quotient de  $\mathcal{R}$  par l'idéal engendré par l'image de l'idéal maximal de  $\Lambda$ .

Il est facile de voir que  $\mathcal{R}'$  est le plus grand quotient  $p$ -ordinaire de  $\mathcal{R}$  dans lequel  $\rho$  peut être déformée avec un déterminant constant. Ainsi, l'anneau local  $\mathcal{R}'$  représente  $\mathcal{D}_{\det \rho}^{ord}$ .

### 6.3. Démonstration du Théorème 1.1 et du Théorème 1.3.

**Théorème 6.4.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.1 ou du Théorème 1.3, le morphisme (19) est un isomorphisme d'anneaux réguliers.*

*Démonstration.*

Le corollaire 5.6 et le théorème 5.3 impliquent que  $\dim t_{\mathcal{D}} = [F : \mathbb{Q}] + 1$ , donc la dimension de l'espace tangent de  $\mathcal{R}$  est  $[F : \mathbb{Q}] + 1$ . D'autre part, l'anneau local  $\mathcal{T}$  est equidimensionnel de dimension  $[F : \mathbb{Q}] + 1$  (puisque  $\mathcal{E}$  est equidimensionnelle de dimension  $[F : \mathbb{Q}] + 1$ ) et par conséquent, la proposition 6.3 implique que (19) est un isomorphisme d'anneaux locaux réguliers de dimension  $[F : \mathbb{Q}] + 1$ .  $\square$

L'isomorphisme d'anneaux locaux  $\mathcal{R} \simeq \mathcal{T}$  et (20) impliquent qu'il existe des isomorphismes  $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}^{ord}$  et  $\mathcal{R}' \simeq \mathcal{T}'$ . Ainsi, on peut conclure grâce au théorème 5.3 dans le cas où  $M$  est totalement réel. Dans le cas où  $M$  est totalement complexe, le corollaire 5.6 implique que  $\mathcal{T}' \simeq \bar{\mathbb{Q}}_p$  et donc  $\kappa$  est étale en  $x$ , ce qui achève notre démonstration.

### 6.4. $\mathcal{R}_{\min} = \mathcal{T}$ dans la cas où l'extension $M/F$ n'est pas totalement réel.

Soient  $h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$  l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire en  $p$  construite par Hida dans [26] et  $h'$  la sous-algèbre de Hecke de  $h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$  engendrée sur l'algèbre d'Iwasawa par les opérateurs de Hecke  $\{U_{\mathfrak{p}}, T_{\ell}, \langle \ell \rangle\}_{\mathfrak{p}|p, \ell \nmid np}$  (On a omit les opérateurs  $U_{\mathfrak{q}}$  pour  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$ ). Il est connu que le lieu quasi-ordinaire de  $\mathcal{E}^{n,ord}$  de  $\mathcal{E}$  est la fibre générique de l'algèbre de Hecke  $h'$ . Puisque  $f$  est ordinaire en  $p$ , il existe un unique morphisme  $\varphi_{\theta}^{n,ord} : h' \rightarrow \mathcal{O}$  qui envoie  $T_{\ell}$  sur  $\text{Tr } \rho(\text{Frob}_{\ell})$  pour tout  $\ell \nmid np$ .

On note  $\mathcal{P}_{\theta}^{n,ord}$  l'idéal premier  $\ker \varphi_{\theta}^{n,ord}$  et  $\mathcal{H}$  le complété de l'anneau local de  $\text{Spec } h'$  en  $\mathcal{P}_{\theta}^{n,ord}$ . Après une extension par des scalaires, on peut supposer que  $\mathcal{H}$  contient  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ .

Soit  $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}}$  la catégorie des  $\mathcal{O}$ -algèbres locales complètes noethériennes de corps résiduel  $\mathbb{F}$  et dont les morphismes sont les homomorphismes locaux d'anneaux locaux qui induisent l'identité sur les corps résiduels.

On a les conditions suivantes :

- **(AI<sub>F</sub>)** La restriction  $\bar{\rho}$  à  $G_{F(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p})}$  est absolument irréductible.
- **(LD<sub>p</sub>)**  $F$  est linéairement disjointe de  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  sur  $\mathbb{Q}$  et  $\mu_p(F_{\mathfrak{p}}) = \{1\}$  pour tout  $\mathfrak{p} \mid p$ , où  $\zeta_p$  est une racine  $p$ -ième de l'unité et  $\mu_p(F_{\mathfrak{p}})$  est l'ensemble des racines  $p$ -ième de l'unité de  $F_{\mathfrak{p}}$ .

La condition **(LD<sub>p</sub>)** est plus faible que la condition :  $p$  est non ramifié dans  $F$ .

On suppose dans cette sous-section que la représentation résiduelle  $\rho \otimes \mathbb{F} = \bar{\rho} = \text{Ind}_M^F \bar{\psi}$  est absolument irréductible, minimale au sens de Fujiwara [22],  $p$ -distinguée et l'ordre de  $\psi$  est premier avec  $p$ . D'après les critères de Schlesinger, le foncteur  $\mathcal{D}_{\bar{\rho}}$  des déformations de  $\bar{\rho}$  qui sont minimales et non ramifiées en dehors de  $\mathfrak{np}$  et quasi-ordinaires en  $p$  à valeurs dans les objets de la catégorie  $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}}$  est représentable par le couple  $(\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min}, \rho_{\mathbb{F}}^{n, \text{ord}})$ .

D'autre part, on note  $h^{n, \text{ord}}$  la composante locale  $h^{n, \text{ord}}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$  correspondant à  $\bar{\rho}$  ( $h^{n, \text{ord}}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$  est semi-local) et  $\rho_{h^{n, \text{ord}}} : G_{F, S} \rightarrow \text{GL}_2(h^{n, \text{ord}})$  la déformation quasi-ordinaire en  $p$  de  $\bar{\rho}$  construite par Hida dans [26] qui envoie  $\text{Frob}_{\ell}$  vers  $T_{\ell}$  pour  $\ell \nmid \mathfrak{np}$ . Sous les hypothèses **(AI<sub>F</sub>)** et **(LD<sub>p</sub>)**, le théorème de Fujiwara's [22] appliqué à la représentation résiduelle  $\bar{\rho}$  nous donne que  $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min} \simeq h^{n, \text{ord}}$ .

Pour tout premier  $\mathfrak{q}$  de  $F$  divisant  $\mathfrak{n}$ , on note  $a_{\mathfrak{q}}$  la valeur propre de  $f$  pour l'opérateur de Hecke  $U_{\mathfrak{q}}$ . Soit  $\mathcal{D}_{\min}$  le sous-foncteur de  $\mathcal{D}$  qui consiste en les déformations  $\rho_A$  qui sont minimales, dans le sens où pour tout  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$  tel que  $a_{\mathfrak{q}} \neq 0$ , l'espace des  $I_{\mathfrak{q}}$ -invariants dans  $\rho_A$  est un  $A$ -module libre de rang 1. Le foncteur  $\mathcal{D}_{\min}$  est représentable par  $(\mathcal{R}_{\min}, \rho_{\mathcal{R}_{\min}})$ . Puisque la représentation  $\rho$  est une déformation de  $\bar{\rho}$ , donc  $\mathcal{D}_{\min}$  est la fibre générique du foncteur  $\mathcal{D}_{\bar{\rho}}$  (voir [29, 2.3.5]). Ainsi, il existe un isomorphisme (après une extension par des scalaires) entre  $\mathcal{R}_{\min}$  et la complétion de la localisation de  $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min}$  par l'idéal premier de hauteur 1 donné par le noyau du morphisme  $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min} \rightarrow \mathcal{O}$  qui induit la déformation  $\rho$  de  $\bar{\rho}$ . De plus, la déformation  $\rho_{\mathcal{R}_{\min}}$  est le tiré-en-avant de  $\rho_{\mathbb{F}}^{n, \text{ord}}$  par le morphisme de localisation  $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min} \rightarrow \mathcal{R}_{\min}$ .

**Lemme 6.5.** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

- (i) *Il existe un isomorphisme  $(\mathcal{H}, \rho_{\mathcal{H}}) \simeq (\mathcal{R}_{\min}, \rho_{\mathcal{R}_{\min}})$ .*
- (ii) *Il existe un isomorphisme  $\mathcal{H} \simeq \mathcal{T}$ .*

- (iii) *L'application canonique  $\mathrm{Spec} h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O}) \rightarrow \mathrm{Spec} h'$  induit un isomorphisme sur les complétés des anneaux locaux aux points associés à  $f$ .*

*Démonstration.* (i) D'après Nyssen [37] et Rouquier [38],  $\mathcal{R}_{\min}$  est engendré sur  $\Lambda$  par la trace de  $\rho_{\mathcal{R}_{\min}}$ . Donc, l'isomorphisme  $(\mathcal{H}, \rho_{\mathcal{H}}) \simeq (\mathcal{R}_{\min}, \rho_{\mathcal{R}_{\min}})$  découle immédiatement de l'isomorphisme  $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min} \simeq h^{n,ord}$ , du fait que le foncteur  $\mathcal{D}_{\min}$  est la fibre générique du foncteur  $\mathcal{D}_{\bar{\rho}}$  et du lemme [29, 2.3.5].

(ii) D'après la construction de la variété  $p$ -adique rigide  $\mathcal{E}$ , il existe un isomorphisme de variétés analytiques rigides  $\mathcal{E}^{n,ord} \simeq (\mathrm{Spec} h')^{rig}$  induisant un isomorphisme naturel sur les complétés des anneaux locaux en tout point.

- (iii) Puisque  $\bar{\rho}$  est minimale,  $U_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{H}$  pour tout  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$ . □

### 6.5. Preuve du Théorèmes 1.4.

Soit  $\mathcal{D}_{\min}^{ord}$  le sous-foncteur de  $\mathcal{D}_{\min}$  qui consiste en les déformations  $\rho_A$  qui sont ordinaires en  $p$ . Le foncteur  $\mathcal{D}_{\min}^{ord}$  est représentable par  $\mathcal{R}_{\min}^{ord}$ .

On a l'isomorphisme suivant :

$$(21) \quad \mathcal{R}_{\min} / \mathcal{I}^{aug} \mathcal{R}_{\min} \simeq \mathcal{R}_{\min}^{ord}$$

On note  $\mathcal{R}'_{\min}$  pour le quotient de  $\mathcal{R}_{\min}$  par l'idéal engendré par l'image de l'idéal maximal de  $\Lambda$ .

On remarque que  $\mathcal{R}'_{\min}$  est le plus grand quotient  $p$ -ordinaire de  $\mathcal{R}_{\min}$  dans lequel  $\rho$  peut être déformée avec un déterminant constant. Ainsi, l'anneau local  $\mathcal{R}'_{\min}$  représente le sous-foncteur  $\mathcal{D}_{\det \rho}^{ord}$  qui consiste en les déformations qui sont minimales.

D'après le lemme 6.5, on a un isomorphisme entre  $\mathcal{R}_{\min} \simeq \mathcal{T}$ . De plus, (21) impliquent qu'il existe des isomorphismes entre  $\mathcal{R}_{\min}^{ord} \simeq \mathcal{T}^{ord}$  et  $\mathcal{R}'_{\min} \simeq \mathcal{T}'$ . Dans nos calculs de l'espace tangent du foncteur  $\mathcal{D}$ , la condition minimale en  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$  est toujours vraie pour les 1-cocycles, puisque n'importe quel élément de  $\mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  est non ramifié en dehors de  $p$  et  $\rho$  est d'image finie. Ainsi, les espaces tangents de  $\mathcal{R}'$  et de  $\mathcal{R}'_{\min}$  sont égaux et donc l'espace tangent de  $\mathcal{R}'_{\min}$  est non trivial d'après la proposition 4.5, ce qui achève notre démonstration.

### 6.6. La courbe de Hecke-Hilbert parallèle $\mathcal{C}_F$ au point $x$ .

La courbe de Hecke-Hilbert parallèle  $\mathcal{C}_F$  est équidimensionnelle de dimension 1.

**Corollaire 6.6.** *On a :*

- (i) *Sous les hypothèses du théorème 1.4 et si  $M$  a au plus  $2([F : \mathbb{Q}] - 2)$  plongements complexes et  $S^p$  est vide, alors  $f$  est un point singulier de la courbe de Hecke-Hilbert  $\mathcal{C}_F$ .*
- (ii) *Supposons que  $M$  est totalement réel, la conjecture de Leopoldt est vraie pour  $M$  et  $\#S_p \geq 2$ , alors  $f$  est un point singulier de la courbe de Hecke-Hilbert  $\mathcal{C}_F$ .*

*Démonstration.*

(i) Puisque  $\mathcal{R}_{\min}^{ord} \simeq \mathcal{T}^{ord}$ , la proposition 4.5 implique que la dimension de l'espace tangent de  $\mathcal{T}^{ord}$  est au moins 2, or la dimension de Krull de  $\mathcal{T}^{ord}$  est 1 (puisque  $\mathcal{C}_F$  est équidimensionnelle de dimension 1), d'où le résultat.

(ii) Même argument que dans (i) combiné avec le théorème 5.3.

□

**Remarque 6.7.** *La variété de Hecke existe si  $N_{\mathbb{Q}}^F(\mathfrak{n}) \geq 4$ , car sa construction dépend de l'existence d'un schéma qui représente l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal, et pour  $N_{\mathbb{Q}}^F(\mathfrak{n}) < 4$ , cet espace de modules n'est pas représentable par un schéma.*

*Puisque l'algèbre de Hecke  $h'$  est finie et sans torsion sur l'algèbre d'Iwasawa, alors les théorèmes [25, 2.4] et [39, 3] impliquent que  $\mathcal{H}$  est équidimensionnel de dimension  $[F : \mathbb{Q}] + 1$ , et ainsi si  $N_{\mathbb{Q}}^F(\mathfrak{n}) < 4$ , nos théorèmes restent vraie après avoir remplacer  $\mathcal{T}$  par  $\mathcal{H}$ .*

## 7. PREUVE DU THÉORÈME 0.5

On démontre le Théorème 1.2 dans cette section en utilisant les techniques de [14]. L'existence du sous-groupe canonique sur un voisinage strict du lieu ordinaire de la variété de Hilbert induit l'injection suivante

$$j : S_1(\mathfrak{n}p, \chi)[f] \hookrightarrow S_1^\dagger(\mathfrak{n}, \chi)[[f]],$$

où  $S_1^\dagger(\mathfrak{n}, \chi)[[f]]$  est l'espace propre généralisé associé à  $f$  dans l'espace des formes surconvergentes de poids 1. En utilisant le même argument que celui déjà utilisé dans la démonstration de la proposition [14, 1.2], l'inclusion  $j$  est un isomorphisme si, et seulement si,  $\mathcal{E}$  est étale sur  $\mathcal{W}_F$  en  $x$ .

Sous les hypothèses du Théorème 1.1 et si de plus  $S_p$  est non vide, alors il existe un morphisme surjectif  $\pi : \mathcal{T}' \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$  de noyau  $I_\pi$ .  $I_\pi$  annule un sous-espace

$S_1^\dagger(\mathfrak{n}, \chi)[I_\pi]$  de dimension 2 de  $S_1^\dagger(\mathfrak{n}, \chi)[[f]] = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{T}', \bar{\mathbb{Q}}_p)$  et ce sous-espace contient une forme propre généralisée normalisée  $f^\dagger$ .

Pour tout idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $F$ , on note respectivement  $a_{\mathfrak{q}}(f^\dagger)$  et  $a_{\mathfrak{q}}(f)$  les coefficients de Fourier de  $f^\dagger$  et  $f$ . D'autre part, avec le même argument utilisé dans [14], l'opérateur de Hecke  $T_{\mathfrak{q}}$ , où  $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n}p$ , agit sur  $f^\dagger$  de la manière suivante

$$(22) \quad T_{\mathfrak{q}} f^\dagger = a_{\mathfrak{q}}(f) f^\dagger + a_{\mathfrak{q}}(f^\dagger) f$$

On rappelle que  $H$  est le corps fixé par  $\ker \psi_\varphi$  et que  $G'' = \text{Gal}(H/M)$ . Soit  $\ell \nmid \mathfrak{n}p$  un premier de  $F$  qui est inerte dans  $M$ , alors le premier de  $M$  au dessus de  $\ell$  se décompose complètement dans  $H$  (puisque  $\rho$  est non ramifié en  $\ell$ ). On note  $\Sigma_\ell$  l'ensemble des premiers de  $H$  au dessus de  $\ell$ . Puisque l'extension  $H/M$  est galoisienne,  $G''$  agit sur  $\Sigma_\ell$ . Soient  $\lambda \in \Sigma_\ell$  et  $u_\lambda \in \mathcal{O}_H[1/\lambda]^\times \otimes \mathbb{Q}$  une  $\lambda$ -unité de  $H$  de  $\lambda$ -valuation égale à 1.  $u_\lambda$  est défini à une unité près et l'élément

$$(23) \quad u(\psi_\varphi, \lambda, g_i) = \sum_{h \in G''} \psi_\varphi(h) \otimes g_i \circ h(u_\lambda) \in \bar{\mathbb{Q}} \otimes g_i(\mathcal{O}_H)[1/\ell]^\times \text{ où } g_i \in I'_F$$

est indépendant du choix de  $u_\lambda$ , puisque  $H$  est CM (car  $M$  est totalement réel) et donc on n'a pas d'unité de  $\bar{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{O}_H^\times$  dans le  $\psi_\varphi$ -sous-espace propre.

Soit  $e_2$  un vecteur propre de  $\bar{\mathbb{Q}}_p^2$  pour  $\psi^\sigma$  et  $e_1 = \rho(\sigma)e_2$ . Dans la base  $(e_1, e_2)$ , on a

$$(24) \quad \rho|_{G_M} = \begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \psi^\sigma \end{pmatrix} \quad \rho|_{G_F \setminus G_M} = \begin{pmatrix} 0 & \eta' \\ \eta & 0 \end{pmatrix}$$

où  $\eta$  et  $\eta'$  sont des fonctions de  $G_F \setminus G_M$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{Q}}$  définies par  $\eta(h) = \psi(\sigma h)$  et  $\eta'(h) := \psi(h\sigma^{-1})$ .

Soient  $\sigma_\lambda \in \text{Gal}(H_\lambda/F_\ell) \subset \text{Gal}(H/F)$  le Frobenius en  $\ell$  attaché à la place première  $\lambda$  et  $H_\psi$  le corps de nombres fixé par  $\psi$  ( $H \subset H_\psi$ ). D'après la relation [14, (13)],  $\eta(\sigma_\lambda)$  ne dépend pas du choix du premier de  $H_\psi$  au dessus de  $\lambda$ .

On a les relations suivantes (voir [14, (13)])

$$(25) \quad \begin{aligned} \forall g \in \text{Gal}(H/M), \eta(\sigma_{g(\lambda)}) &= \psi(\sigma \sigma_{g(\lambda)}) = \psi(\sigma g^{-1} \sigma_\lambda g) = \psi_\varphi(g) \psi(\sigma \sigma_\lambda) = \psi_\varphi(g) \eta(\sigma_\lambda) \\ \forall g \in \text{Gal}(H/M), u(\psi_\varphi, g(\lambda), g_i) &= \psi_\varphi^{-1}(g) u(\psi_\varphi, \lambda, g_i) \end{aligned}$$

D'après la relation (25), l'élément

$$(26) \quad u(\psi_\varphi, \ell, g_i) = \psi(\sigma \sigma_\lambda) \otimes u(\psi_\varphi, \lambda, g_i) \in \bar{\mathbb{Q}} \otimes g_i(\mathcal{O}_H)[1/\ell]^\times$$

dépend uniquement de  $\ell$  et non du choix du premier  $\lambda \in \Sigma_\ell$ .

D'après le (ii) du théorème 5.3, le morphisme  $\Psi' : (\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$  défini par

$$\left( u \otimes 1 \mapsto \sum_{g_i \in I'_F} \alpha_i \sum_{g \in G''} \psi_\heartsuit(g) \log_p(\iota_p \circ g_i \circ g(u)) \right)$$

est associé à un unique élément de l'espace tangent de  $\mathcal{T}'$  (i.e  $\Psi' = b|_{G_H} = c|_{G_H}^\sigma \in H^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit])$  et donne aussi un unique morphisme surjectif  $\pi : \mathcal{T}' \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$  associé à  $\Psi'$  qui induit une déformation  $\tilde{\rho} : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon])$  de déterminant égal à  $\det \rho$ .

D'après l'isomorphisme (11), on peut étendre  $\Psi'$  à un 1-co-cycles de  $H^1(G_M, \psi_\heartsuit)$  de manière unique (à co-bords près), donc la déformation  $\tilde{\rho}$  est de la forme suivante :

$$(27) \quad \tilde{\rho}|_{G_M} = \begin{pmatrix} \psi & \psi^\sigma \Psi' \cdot \epsilon \\ \psi \Psi \cdot \epsilon & \psi^\sigma \end{pmatrix} \quad \rho|_{G_F \setminus G_M} = \begin{pmatrix} d_1 \cdot \epsilon & \eta' \\ \eta & d_2 \cdot \epsilon \end{pmatrix}$$

H.Darmon, A.Lauder and V.Rotger ont montré dans [14] les propositions suivantes.

**Lemme 7.1.** [14, 2.1] *La fonction  $\Psi$  (resp.  $\Psi'$ ) appartient au groupe de cohomologie  $H^1(M, \psi_\heartsuit^{-1})$  (resp.  $H^1(M, \psi_\heartsuit)$ ). De plus, on a les relations suivantes après restriction des fonctions ci-dessus à  $G_H$  :*

$$(28) \quad \Psi'(h) = \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} \Psi(\tau h \tau^{-1}),$$

où  $\tau \in G_F \setminus G_M$ .

**Lemme 7.2.** [14, 2.2] *Pour tout premier  $\ell$  de  $F$  inerte dans  $M$  et pour tout  $\lambda \in \Sigma_\ell$ , on a*

$$\Psi'(\mathrm{Frob}_\lambda) = \sum_{g_i \in I'_F} \alpha_i \log_p(u(\psi_\heartsuit, \lambda, g_i)).$$

La déformation  $\tilde{\rho}$  est la représentation galoisienne associée à une forme modulaire propre surconvergente de poids 1 à coefficients dans  $\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$ , notée  $\tilde{f} = f + f^\dagger \epsilon$ . La forme modulaire  $f^\dagger$  est une forme propre généralisée et normalisée comme dans l'introduction et ses coefficients de Fourier peuvent être interprétés de la manière suivante :

$$(29) \quad \mathrm{Tr}(\tilde{\rho}(\mathrm{Frob}_\ell)) = a_\ell(f) + a_\ell(f^\dagger) \epsilon,$$

où  $\ell \nmid np$ .

Soit  $\ell \nmid np$  un premier de  $F$  qui se décompose dans  $M$ , alors  $\text{Frob}_\ell \in G_M$  et donc  $\text{Tr}(\tilde{\rho})(\text{Frob}_\ell) = a_\ell(f)$ . Ainsi, on a démontré la première partie du Théorème 1.2.

Maintenant, soit  $\ell \nmid np$  un premier de  $F$  qui est inerte dans  $M$ . On fixe un plongement  $\iota_\ell : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$  qui induit un plongement du groupe de décomposition  $G_{F_\ell}$  dans  $G_F$ . Si  $\text{Frob}_\ell$  est un Frobenius de  $G_F$  en  $\ell$  alors  $\text{Frob}_\ell^2$  est le Frobenius de  $G_M$  associé au premier de  $M$  au dessus de  $\ell$ . Soit  $\lambda \in \Sigma_\ell$  la place première canonique de  $H$  au dessus de  $\ell$  induite par  $\iota_\ell$  ( $\sigma_\lambda = \text{Frob}_\ell$ ).

D'après les relations (27) et (29),

$$(30) \quad \text{Tr}(\tilde{\rho}(\text{Frob}_\ell)) = (d_1(\text{Frob}_\ell) + d_2(\text{Frob}_\ell))\epsilon = a_\ell(f^\dagger)\epsilon,$$

D'autre part, en utilisant (27), un calcul direct de  $\tilde{\rho}(\text{Frob}_\ell^2)$  implique

$$(31) \quad \begin{pmatrix} * & \psi^\sigma(\text{Frob}_\ell^2)\Psi'(\text{Frob}_\ell^2)\epsilon \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \eta'(\text{Frob}_\ell)(d_1(\text{Frob}_\ell) + d_2(\text{Frob}_\ell))\epsilon \\ * & * \end{pmatrix}$$

Donc,  $\psi^\sigma(\text{Frob}_\ell^2)\Psi'(\text{Frob}_\ell^2) = \eta'(\text{Frob}_\ell)(d_1(\text{Frob}_\ell) + d_2(\text{Frob}_\ell))$ .

Finalement, il découle de la relation (29) et de la proposition [14, 2.2] que

$$a_\ell(f^\dagger) = \eta(\text{Frob}_\ell)\Psi'(\text{Frob}_\ell^2) = \eta(\lambda)\Psi'(\text{Frob}_\lambda).$$

## RÉFÉRENCES

- [1] Y. Amice et J. Vêlu, *Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke*, Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974), Soc. Math. France, Paris, 1975, pp. 119–131. Astérisque, Nos. 24–25. MR 0376534
- [2] F. Andreatta et A. Iovita et V. Pilloni, *p-adique families of Hilbert modular forms*, to appear in Astérisque.
- [3] J. Bellaïche and G. Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque, Soc. Math. France, Paris, 2009.
- [4] J. Bellaïche, *Critical p-adique L-functions*, Invent. Math., 189 (2012), pp. 1–60.
- [5] J. Bellaïche, *Eigenvarieties and p-adique L-functions*, book in preparation.
- [6] J. Bellaïche and G. Chenevier, *Lissité de la courbe de Hecke de  $\text{GL}_2$  aux points Eisenstein critiques*, J. Inst. Math. Jussieu 5 (2006), n°2, 333–349.
- [7] J. Bellaïche and M. Dimitrov, *On the eigencurve at classique weight one points*, Duke Math. J. 165.(2016), n°2, 245–266.
- [8] S. Bijakowski V. Pilloni B. Stroth, *Surconvergence et classicité : le cas Hilbert*, à paraître dans Annals of Maths.

- [9] A. Brumer, *On the units of algebraic number fields*, Mathematika, 14 (1967), pp. 121–124.
- [10] K. Buzzard, *Eigenvarieties*, in *L-functions and Galois representations*, vol. 320 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 59–120.
- [11] G. Chenevier, *Familles  $p$ -adiques de formes automorphes pour  $GL_n$* , J. Reine Angew. Math., 570 (2004), pp. 143–217.
- [12] S. Cho and V. Vatsal, *Deformations of induced Galois representations*, J. Reine Angew. Math., 556 (2003), pp. 79–98.
- [13] R. Coleman and B. Mazur, *The Eigencurve*, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry* (Durham, 1996), vol. 254 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 1–113.
- [14] H. Darmon, A. Lauder and V. Rotger, *Stark points and  $p$ -adic iterated integrals attached to modular forms of weight one*, Forum of Mathematics, Pi (2015), Vol. 3, e8, 95 pages.
- [15] H. Darmon, A. Lauder and V. Rotger, *Overconvergent generalised eigenforms of weight one and class fields of real quadratic field*, Advances in Mathematics 283 (2015), 130–142.
- [16] P. Deligne and J.-P. Serre, *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 7 (1974), pp. 507–530.
- [17] S. V. DEO, *On the eigenvariety of Hilbert modular form at classique parallel weight one point with dihedral projective image*. Preprint.
- [18] H. Diao et R. Liu, *The Eigencurve is Proper*, Duke Math.J. 165, Number 7 (2016), 1381–1395.
- [19] M. Dimitrov and E. Ghate, *On classique weight one forms in Hida families*, J. Théor. Nombres Bordeaux, 24 (2012), pp. 639–660.
- [20] M. Dimitrov and Gabor.Wiese, *Unramifiedness of Galois representations attached to weight one Hilbert modular eigenforms mod  $p$* . Preprint.
- [21] M. Dimitrov, *Automorphic symbols,  $p$ -adic  $L$ -functions and ordinary cohomology of Hilbert modular varieties*, Amer. J. Math. 135 (2013), pp. 1–39.
- [22] K. Fujiwara, *Deformation ring and Hecke algebra in the totally real case*, arXiv.
- [23] D. Hensen, *Universal coefficients for overconvergent cohomology and the geometry of eigenvarieties*, arXiv.
- [24] H. Hida, *Nearly ordinary Hecke algebra and Galois representation of several variables*, Proc. JAMI inaugural conference, Supplement to Amer. J.Math(1989). 115–134.
- [25] H. Hida, *On  $p$ -adic Hecke algebras for  $GL_2$  over totally real fields*, Ann. of Math. 128 (1988), 295–384.
- [26] H. Hida, *On nearly ordinary Hecke algebras for  $GL(2)$  over totally real fields*, Advanced Studies in Pure Math. 17 (1989), 139–169.
- [27] K. Kitagawa, *On standard  $p$ -adic  $L$ -functions of families of elliptic cusp forms*, in  *$p$ -adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture* (Boston, MA, 1991), vol. 165 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 81–110.



- [28] M. Kisin, *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*, Invent. Math., 153 (2003), pp. 373–454.
- [29] M. KISIN, *Moduli of finite flat group schemes and modularity*, Ann. of Math. 170 (2009), 1085–1180.
- [30] M. Kisin K.F. Lai, *Overconvergent Hilbert modular forms*, Amer. J. Math. 127 (2005), no. 4, 735–783.
- [31] B. Mazur, J. Tate, and J. Teitelbaum, *On  $p$ -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math., 84 (1986), pp. 1–48.
- [32] M. Ohta, *Hilbert modular forms of weight one and Galois representations*, Automorphic forms of several variables (Katata, 1983), Progr. Math., 46, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984, pp. 333–352.
- [33] A. Panchiskin, *Two variable  $p$ -adic  $L$  functions attached to eigenfamilies of positive slope*, Inventiones math., 154, pp. 551–615 (2003).
- [34] V. Pilloni B. Stroth, *Surconvergence, ramification et modularité*, à paraître dans Astérisque.
- [35] J. Rogawski J. Tunnell, *On Artin  $L$ -functions associated to Hilbert modular forms of weight one*, Inventiones Mathematicae. 74 (1983), n°1, 1–42.
- [36] S. Hattori, *On a properness of the Hilbert eigenvariety at integral weights : the case of quadratic residue fields*. Preprint.
- [37] L. Nyssen, *Pseudo-représentations*, Math. Ann., 306 (1996), pp. 257–283.
- [38] R. Rouquier, *Caractérisation des caractères et pseudo-caractères*, J. Algebra, 180 (1996), pp. 571–586.
- [39] A. Wiles, *On ordinary  $\lambda$ -adic representations associated to modular forms*, Invent. Math., 94 (1988), pp. 529–573.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA, FACULTAD DE MATEMÀTICAS Y ESTADÍSTICA, 08034 BARCELONA

*E-mail address:* adelbetina@gmail.com